DANIELIS BERNOULLI Joh. Fil.

Med. Prof. Basil.

ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.

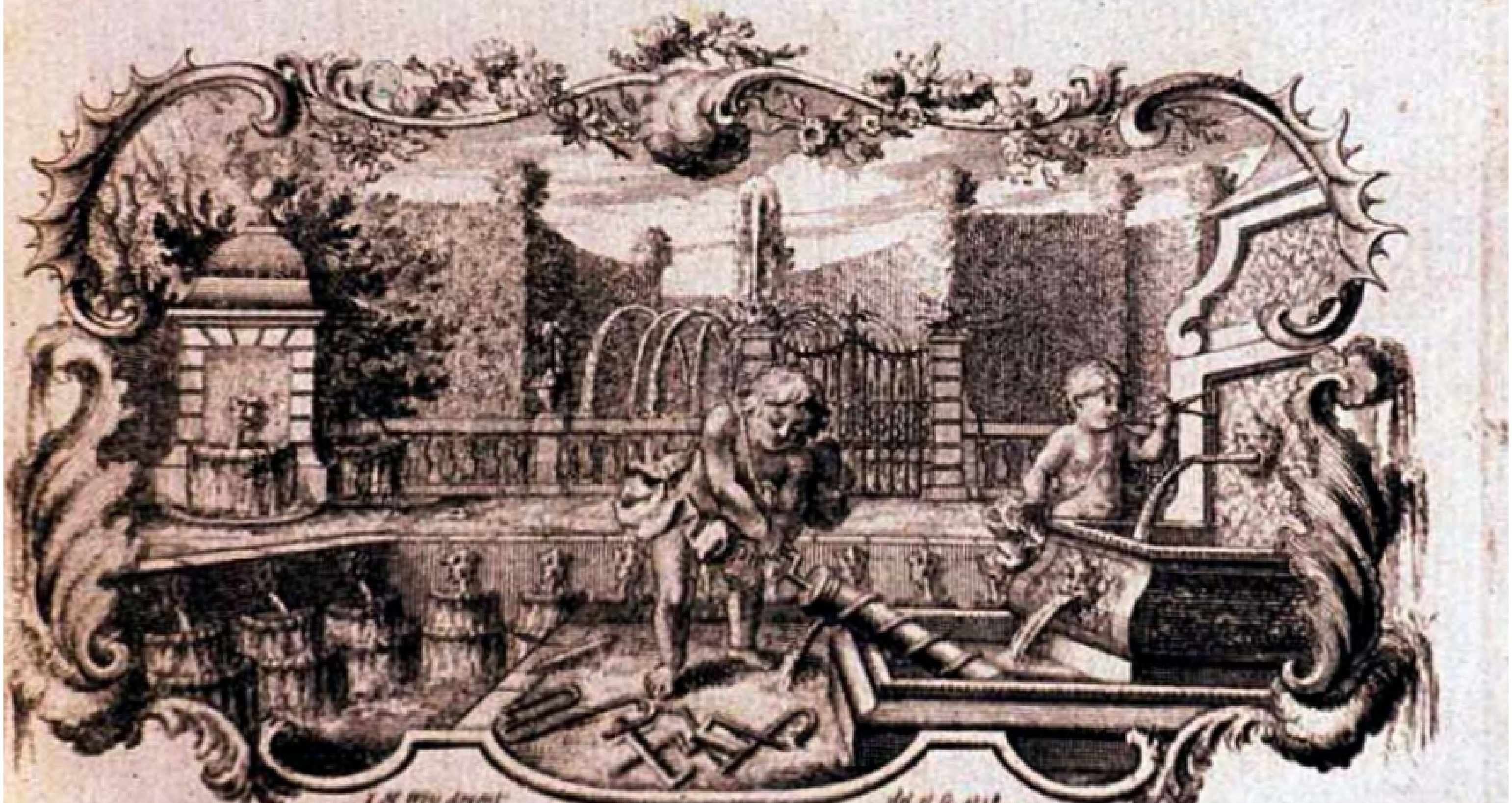
HYDRODYNAMICA,

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.

OPUS ACADEMICUM

AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.



ARGENTORATI,

Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,

Anno M D CCXXXVIII.

Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Basiliensis.

DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.

HYDRODYNAMICA,

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.

OPUS ACADEMICUM

AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.

ARGENTORATI,

Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,

Anno M D CCXXXVIII.

Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

Ex Libris
Dominici Merle
Civis Senensis

CELSISSIMO
ATQUE
SERENISSIMO
PRINCIPI ET DOMINO
DOMINO
ERNESTO
JOHANNI
DEI GRATIA IN LIVONIA
CURLANDIÆ
ET
SEM - GALLIÆ
DUCI.

CELSISSIME ATQUE SERENISSIME
PRINCEPS,
DOMINE GRATIOSISSIME.

NOn aufus fuiffem Sereniffimo Nomini Tuo *Hydrodynamicam* hanc infcribere, nifi illa Academiæ Scientiarum, fub umbone Tuo Petropoli florentis, confilio & fubfidiis a me confcripta fuiffet. Novimus quantum Tibi, Sereniffime Princeps, Magnanime Academiæ Protector, poft Auguftam illam orbis borealis Palladem, debeamus, idque cum toto orbe literato, qui præclara fibi porro ab Academia, amœnis benevolentiæ Tuæ radiis colluftrata, pollicetur, pia & immortali recolemus memoria. Florebit in æternitatis facrario apud Rufficam gentem Tuorum in illam merito-

rum

rum magnitudo, apud Curlandos felicium, quæ divina illis providentia ſub Sceptro Tuo deſtinavit, fatorum memoria: apud univerſas denique gentes glorioſiſſimæ Tuæ vitæ perpetua admiratio. Quam cara ſit ſuperis Ruſſici Sceptri Majeſtas populique Tui felicitas, illuſtria temporum præſentium fata nos docent. Hi proſperos magnorum conſiliorum eventus; hi vitæ Tibi & Principatus diuturnitatem; hi ſucceſſores ex ſanguine Tuo, virtutum Tuarum æmulos, longa ſerie ad omnem temporum profunditatem, orbe univerſo plaudente, largiantur. Ita vovet

SERENISSIME & CELSISSIME PRINCEPS

DOMINE GRATIOSISSIME

Celſitudinis Tuæ

Scrib. Baſileæ
10. *Mart.* 1738.

Humillimus & Obſequioſiſſimus
Servus

DANIEL BERNOULLI.

PRÆFATIO.

PRodit tandem in publicum Hydrodynamica nostra, superatis omnibus, quæ impressionem ejus ab octo fere annis morata sunt, obstaculis; lucem fortassis haud aspectura, si ad me solum omnis iste labor pertinuisset. Præcipuas enim huius operis partes auspiciis, consiliis, subsidiisque Academiæ Scientiarum Petropolitanæ deberi lubens profiteor. Ansam libro dedit ipsum ejus institutum, quo primi, qui ad eam formandam convenerunt, Professores, de argumento quodam utili &, quantum fieri posset, novo Diatribam conscribere tenebantur, certe admonebantur. Theoriam de viribus & motibus fluidorum, nisi invita Minerva fuerit suscepta, argumentum esse nec inutile nec tritum, quisque facile largietur. Ut autem Lectoris tædium discuterem, rerum varietati inprimis operam dedi, præsertim in quinque posteriorbus sectionibus, atque specimina inserui analytica, physica, mechanica, cum theoretica tum practica, nonnulla geometrica, nautica, astronomica & alia, quorum tamen expositionem operis suscepti ratio non tam ferre quam postulare visa fuit. Quæ festinanti exciderunt sphalmata, æquus harumque rerum intelligens Lector facile corriget. Unicus hujus scripti finis est, ut Academiæ inservirem, cujus omnes labores eo collimant, ut bonarum literarum incrementa & publica commoda promoveat.

INDEX

INDEX SECTIONUM.

SECTIO PRIMA.

SECTIO SECUNDA.

SECTIO TERTIA.

SECTIO QUARTA.

SECTIO QUINTA.

SECTIO SEXTA.

SECTIO SEPTIMA.

SECTIO

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO PRIMA.
Quæ introitus est, variaque continet prænotanda.

§. I.

DUplex cum sit Theoria Fluidorum, quarum altera Hydrostatica, liquorum stagnantium pressiones & æquilibria varia, altera Hydraulica, fluidorum motum spectans, seorsum pertractari a scriptoribus consueverunt, utramque vero tam arcto nexu inter se cohærere perciperem, ut altera alterius ope plurimum egeat, haud dubitavi eas confundere, quantum id ordo rerum postulare videbatur, ambasque nomine communi & generaliori Hydrodynamicæ complecti. Quamvis autem ab antiquissimis temporibus fuerit continuo exculta Theoria fluidorum, incrementa tamen non admodum notabilia cepit; veterum quidem Mathematicorum cognitio eo terminabatur, quod æquilibrium commune fluidorum ſtagnantium, aut etiam corporum cum fluidis, quibus inſident, de quibus Archimedes ſcripſit, intelligebant; & cum præterea per ſe pateat, ubi æquilibrium non eſt, motum verſus partem minoris preſſionis fieri, varios luſus, machinaſque hydraulicas hinc excogitare potuerunt, partim oblectationi, partim publicis commodis egregie inſervientes, qua quidem in re peringenioſos ſe monſtrarunt; videbant etiam, ſed quaſi per tranſennam motus illos, qui preſſioni aëris debentur: Veras autem rationes accuratasque menſuras in Hydraulicis rebus plane ignorabant, atque ſic fere in limine ſubſiſtebant.

§. 2. Motui fluidorum determinando inſervit præcipue effluxus aquæ ex vaſe per foramen valde parvum: tametſi vero non omnino fugeret Frontinum alioſque, uti aliqui credunt, velocitatem aquarum ex vaſe vel caſtello effluentium creſcere ab aucta altitudine aquæ ſupra effluxus locum, negari tamen non poteſt, quin idem Frontinus in computandis aquarum modulis, ſeu erogandis aquis turpes & injuſtos commiſerit errores. Benedictus Caſtellius primus de nexu velocitates inter & altitudines cogitare, falſam autem legem ſuſpicatus eſt, putans, ambas eandem rationem ſequi. Poſt hunc demum Torricellius obſervavit, velocitates creſcere in ſubduplicatâ ratione altitudinum, quem ſecuti ſunt omnes; nec dum vero conveniebant de abſoluta velocitatis menſura, experimenta tamen inſtituerunt, qua iſtam menſuram definiri exiſtimarunt, inter quæ potiſſimum allegari ſolet illud, quod a Gulielmino ſumtum, octieſque repetitum fuit, quamvis id ab aliis experimentis ex illo tempore factis admodum recedat: ſolent autem omnia inter ſe differre, quæ ſub diverſis fiunt circumſtantiis, nec ſemper tutum eſt, uti ſuo loco dicemus pluribus, ex quantitate aquæ, definito tempore per definitum lumen effluentis, judicium ferre de ejuſdem velocitate. Sic cum ad calculum revocamus experimentum Gulielminianum, cujus modo mentionem fecimus, concludendum eſſet ex quantitate aquæ, quæ per lumen datum tempore dato effluxit, velocitatem ejus non majorem fuiſſe illa, quæ debetur quartæ parti altitudinis ſuperficiei aqueæ ſupra foramen. Et alia ſunt eodem Auctore experimenta, quæ recenſentur *Lib. 2. prop. 1. menſ. aquarum fluent*: vi quorum aqua effluens velocitate ſua aſcendere poſſit ad duas tertias iſtius altitudinis; Apud Mariottum alioſque extant, quæ pro dimidia altitudine faciunt; qua non obſtante velocitatum ita æſtimatarum diverſitate, mihi perſuadeo, vix a ſe invicem

vicem veras velocitates diſcrepaſſe, ratione habita ad altitudines aquæ & ubique tales proxime fuiſſe, quæ integræ altitudini debeantur: illa autem, quæ loco ultimo fuere citata, quæque pro dimidia altitudine prima fronte videntur ſtare, numero apud Authores plurima, movebant procul dubio Newtonum, Virum meritis ſuis immortalem, ut paulo confidentius loqueretur de Theoria, qua aquam per lumen minimum ex vaſe verticaliter ſurſum exilientem ad dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis aſcendere poſſe invenerat, etſi aſſertum iſtud omnibus experimentis, quæ de his altitudinibus immediate ſumta fuere, contradicat: Theoriam expoſuit in *edit. prima princ. Math. phil. nat.*, eamque petiit ex preſſione, qua aqua præ foramine poſita moxque egreſſura ad motum cietur. Quoniam vero natura rei haud ſemper permittere videtur, ut *a priori* definiatur vis aquam ad effluxum animans, atque potius de ea vix aliter, quam ex phænomenis motus, id eſt, *a poſteriori*, quod ſæpe expertus ſum, judicare licet, ſuſpectum eſſe debet ratiocinium iſti principio innixum. Hinc etiam Vir modo laudatus ſententiam ſuam mutavit in ſecunda Operis ſui editione, rurſuſque aliquantum in tertia, affirmans aquam ad totam quidem altitudinem aſcendere, venam autem, quam efformat, præ foramine contrahi ſeu gracileſcere, atque ſic utrique phænomeno velocitatis quantitatisque dato tempore effluentis, quæ ſibi contradicere videbantur, ſatisfaciens. Quamvis autem contractionem iſtam fili aquei veram eſſe cauſam, ob quam velocitas aquæ effluentis non poſſit æſtimari ex quantitate, negandum non ſit, puto tamen, Theoriam ipſi non eſſe ſuperinſtruendam, quia *accidentalis* eſt, nec ſibimet ubique conſtans, dum velocitas non variat niſi a cauſis alienis veluti attritu, tenacitate aquæ, aliisque ſimilibus. Sic cum aqua non per ſimplex foramen, ſed per tubulum cylindricum effluit, vena notabiliter non contrahitur ſalva velocitate, excepto eo, quod propter attritum ei demitur: ſi quis autem hoc non obſtante putet, ex preſſione poſſe recte & tuto aquarum fluxum deduci, hunc rogarim, ut ad caſus magis compoſitos animum advertat, v. gr. ad fluxum aquæ, quem mirabilem vocat Mariottus, ex vaſe, quod diaphragma aliquod foramine perforatum in duas cavitates aqua implendas diſpeſcit, ſic ut aqua per duo foramina transfluere cogatur: de hoc motu loquitur Mariottus in tractatu ſuo egregio *de motu aquarum part. IV. pag. m.* 442.

§. 3.

§. 3. Hæc cum ita ſint, facile quiſque ſecum judicabit, quam parum ſpei ſuperſit, aliquando Leges motuum pro fluidis ad regulas Geometriæ puræ reductum iri, ſine ulla hypotheſi phyſica, cum vel in ipſo limine effugerint perſpicaciam Viri ingenio præpotentis & incomparabilis: neque ego credo poſſe ea, quæ in hoc opere expoſiturus ſum, omnem rigorem mathematicum ſubire: Principia Theoriæ phyſica ſunt & non ſine largitione acceptanda ut proxime vera; admiſſis autem principiis, omnia erunt Geometrica, & nullis obnoxia reſtrictionibus, neceſſario nexu inter ſe cohærebunt. Non poſſum tamen, quam bene ſentire de phyſicis iſtis poſitionibus, in quas forte incidi, quandoquidem me manuduxerunt ad plurimas novas proprietates, cum de æquilibrio tum de motu fluidorum detegendas, quæ, niſi me amor ſuſcepti laboris fallit, aliquando Hydrodynamicam inſigniter promovebunt, ſi magis excolantur, quam mihi licuit; ubi monuiſſe conveniet, quando multis, quicquid novum eſt, ſuſpectum eſſe ſolet, totam me Theoriam animo concepiſſe, tractatum conſcripſiſſe, pleraque cum amicis privatim communicaſſe, quædam etiam coram Societate noſtra prælegiſſe, priuſquam ullum experimentum inſtituerim, ne ex præconceptis menſuris opinione falſa, proxime tamen illis ſatisfaciente, me falli paterer, quandoque etiam Viros perſpicaciſſimos intellectis theorematis aperte falſos eſſe, ſe ſibi talia perſuadere non poſſe, nec experimentis confirmatum iri exiſtimare; hisque omnibus geſtis, facta demum fuiſſe experimenta coram Amicis, hæcque ita conveniſſe cum Theoria, quantum ipſe vix ſperare poteram. Nunc vero redeamus illuc, unde divertimus.

§. 4. Poſtquam certi fuerunt Authores de diverſitate velocitatum a mutatis altitudinibus, vaſa conſiderare cœperunt magis compoſita, fiſtulis nempe varie inclinatis atque inæqualiter amplis inſtructa. Harum autem indolem jam ſuo tempore quodammodo cognovit Frontinus, non ignarus, modulum augeri a declivitate vel humilitate calicis, id eſt, fiſtulæ ſignatæ, quæ caſtello, aut aliquando etiam rivo induebatur: unde etiam calices ad lineam, uti loquitur, ordinari & in eadem altitudine poni juſſit. Et hoc quidem reſpectu injuſte poſtulatur Frontinus a quibusdam, velocitatis nullam habuiſſe rationem; ubi vero calculum ponit omnis aquæ acceptæ, illamque comparat cum eroganda, non video, quomodo excuſari poſſit. Experientia quoque edoctus fuerat, quod notari meretur, plus debito aquæ erogari per calicem legiti-

legitimæ tum mensuræ, tum positionis, cui statim fistulæ amplioris moduli subjectæ sint, quod ita esse, recteque a Fabretto indicatum fuisse, suo loco monstrabo, quamvis Viri alias acutissimi, id non satis sibi liquere vel potius de eo se dubitare, innuerint.

§. 5. Quod autem veteres obscure & sine veris mensuris viderunt, id demum Cl. Gulielminus in *Tract. de aquarum fluentium mensura* propositione accuratiori & generaliori complexus est tali, *eandem velocitatem*, inquiens, *esse aquæ fluentis per canalem inclinatum, ac si fluxerit e vase per lumen simile, & æquale sectioni, tantundem a superficie aquæ remotum, quantum sectio ab Horizontali per initium alvei*, quam propositionem impugnavit Dionysius Papinus, ipse multum a veritate aberrans. Quoniam autem in eo sumus, ut commenta, tum Hydrostatica, tum Hydraulica præcipua recenseamus, hoc loco etiam numerandum est illud, de pressione fluidorum ex impetu cognoscenda, nempe *vim fluidi, in planum ad angulum rectum irruentis data velocitate, æqualem esse ponderi cylindrici fluidi super illo plano extructi, cujus altitudo talis sit, ex qua mobile libere cadendo a quiete fluidi velocitatem acquirat.* Problematis hujus utilissimi ope æstimare licet vim fluidorum machinas agitantium, aut, quale est ventus, naves propellentium, motus corporum in mediis resistentibus plurimaque alia. De Hydrostatica autem, quæ tubulis tenuissimis seu capillaribus particularis est, nihil dico, quia hactenus ad Leges generales omnibus fluidis communes reduci non potuit: Incertus præterea est Author, qui primus horum tubulorum indolem observaverit; constat tamen recentem esse observationem, quia de illa in libris ante hos 70. vel 80. annos editis nihil videre est.

§. 6. Authores præter citatos a Galilæi temporibus, in rebus aquariis celebriores sunt Torricellius, Borellus, Vivianus, Pascalius, Boilius, recentioris ætatis sunt Varignonius, Newtonus, Polenus, Hermannus, Jacobus & Johannes Bernoulli, quorum inventa extant in *Comment. Acad. Reg. Sc. Paris. Princ. Math. phil. nat. tractatu de Castellis notisque ad Frontinum*, *Phoronomia*, *Actis Lips.*, aliisque operibus variis. Quæ vero circa curvaturas ex pressione fluidi genitas aliaque hujusmodi inventa a Geometris exhibita fuerunt, quia facile ad Geometriam puram reducuntur, utut de reliquo omni laude digna silentio prætereo.

Expositis his, quæ ad alios pertinent, æquum esse sentio, ut meorum quoque ratione subducta, dicam sincere, an aliqua & quanta Hydrodynamicæ increcrementa ab illis sperari possint aut debeant. Breviter igitur, quantum potero, momenta operis suscepti indicabo.

§. 7. Exhibentur primo loco Theoremata præcipua, quæ ad æquilibrium fluidorum stagnantium pertinent: visa mihi fuit instituti ratio id postulare, quamvis libenter fatear, nullas a me novas adjectas fuisse propositiones: Demonstrandi quidem modus, quantum scio, mihi proprius est, sed cum facile sit, innumeras sibi fingere demonstrationes, parum est, hac quoque in parte, quod mihi arrogo. Phænomena præterea aliqua tubulorum capillarium obiter recensentur, & denique occasione pressionis, quam fluida in latera vasis exercent, Theoremata varia & nonnulla nova adduntur, circa figuram vesicarum liquore impletarum, circa earundem potentias ad onera elevanda, circa constructionem & firmitatem aquæductuum, aliaque affinia.

§. 8. Agitur postea de motu fluidorum ex vase effluentium, & cum omnes, qui hactenus de hac re egerunt, casum unicum maxime obvium, quo foramen ratione amplitudinis vasis internæ infinite parvum censetur, in Theoria sua consideraverint, nostra non parum commendatur sua latitudine; extendit enim se ad positionem foraminis cujuscunque magnitudinis, imo & vasis cujuscunque figuræ. Quamvis enim figuræ vasis internæ consideratio minime requiritur, cum foramen ut infinite parvum considerari potest, attamen sine illa motus aquæ definiri nequit, cum est notabilis magnitudinis. Ex Theoria generali corollaria deducuntur, quæ motum aquarum variabilem ejusdemque affectiones egregie illustrant, confirmantque, quicquid aut experientia docuit, aut rei attributiones per se manifeste indicant. Docet quidem Theoria, quando amplitudines internæ vel mediocriter superant amplitudinem luminis, errorem esse insensibilem, qui ex consideratione foraminis ut infinite parvi nascitur, atque sic nostræ additiones nonnullis fortasse videbuntur satis inutiles. Hos vero, si modo qui futuri sint, secum cogitare velim, præter quod non solum aquariis scribo, sed & Geometris, qui veritatibus nudis etiam delectantur, usum nostrarum meditationum aliis in rebus maximum esse, quod magis intelligent, cum perpenderint, motum incipere a quiete, & per infinitos transire gradus, priusquam certam celeritatem obtineat; maximas mutationes sæpe quidem tam brevi fieri temporis momento, ut sensibus nullo plane modo percipi possint, determinandas tamen esse ad singula puncta, tum ut motus animo recte percipiatur, tum quia exinde varia deduci possunt Theoremata.

Ita

Ita animadverti, (quod exemplum ob rei momentum sit instar omnium,) fieri non posse, ut pressio aquæ, per canalem data velocitate fluentis, in ejusdem latera definiatur, nisi mutationes istæ, quas *momentaneas* dicam, utcunque sensibus imperceptibiles recte animo intelligantur. De his ego, ut primus cogitavi, ita optatissimo cum successu novam Theoriæ aquarum partem addidi, quæ, quia fluidorum tum motum tum pressionem simul respicit, *hydraulico - statica* aptissime vocari visa fuit. Post hæc Theoriæ generalis specimina, de vasis cylindricis tam simplicibus, quam iis, quæ tubis instructa sunt, exhibentur, & in his posterioribus præsertim determinantur mutationes, quæ ab initio fluxus oriuntur, dum datus velocitatis gradus attingitur, & id quidem in hypothesi vasorum amplissimorum; notandum autem est, has mutationes sensibiles admodum esse, etiamsi vasa sunt infinitæ amplitudinis, posseque illas experimentis demonstrari, dum aquæ ex vase amplissimo per foramen simplex effluentes primo statim temporis puncto totam, quantam possunt, velocitatem habent. Pendent prædictæ mutationes tum a longitudine tum a figura tubi. Denique etiam calculi analytici pro varii generis temporibus inveniendis una cum annotationibus physicis eo pertinentibus adjiciuntur. Indicante denique Theoria, fieri non posse, ut aquæ multum ultra supremam scaturiginis superficiem ascendant, monstratur sub fine sectionis, non pertinere ad hypotheses nostras phænomenon singulare, quod ipse sæpius observavi, & pro lubitu imitari possum, cujusque mentio injicitur in *Hist. Reg. Acad. Sc. Paris. ad ann.* 1702. ubi dicitur, accidere quandoque, ut aquæ in fontibus salientibus assurgant ad altitudinem triplam, aut quadruplam ejus, quæ respondet aquæ superficiei supremæ, mox tamen enormem aquæ jactum ad consuetam altitudinem deprimi, posteaque genuina istius phænomeni ratio cum veris mensuris ex Theoria nostra petitis affertur, modusque indicatur saltum insolitum producendi, imo & ad lubitum augendi.

§. 9. Porro Theoria extenditur ad examen motuum ex vasis constanter plenis, quibus nempe tantum aquæ continue affunditur, quantum ex illis effluit: horum indoles in eo potissimum consistit, ut fluida emanantia magis magisque accedant ad illum velocitatis gradum, qui toti altitudini superficiei fluidi supra foramen debetur, eum vero nunquam omnino attingant, nisi post tempus infinitum: vergere tamen demonstrantur aquæ tam cito ad velocitatem istam, ut post tempusculum insensibile tantum non totam acquirant, nisi

cum

cum per longiſſimos rivos aut aquæductus feruntur, magnoque lumine ejiciuntur; tunc enim accelerationes tam celeres non ſunt, quin percipi poſſint, quod ſingulari exemplo ex Cl. Mariotti libro *de motu aquarum* deſumto confirmatur. Quoniam vero motus a quiete incipit & perpetuo creſcit, formulæ dantur, quarum ope vel ex fluxus tempore vel ex quantitate aquarum ejectarum velocitas ſingulis temporis punctis definiri poſſit & viciſſim.

§. 10. In ſequentibus fluida conſiderantur, quæ intra vaſa moventur, ubi præſertim motus fluidorum reciproci ſeu oſcillatorii ad menſuras revocantur, earumque affectiones indicantur. Dedit autem Newtonus Theorema ſimile pro oſcillationibus fluidi, in tubo uniformis amplitudinis (cujus crura duo extrema verticalia, intermedia pars horizontalis) oſcillantis, quod Theorema Pater meus in *Comm. Acad. Imp. Sc. Petrop. tom. 2. p. 201.* generalius reddidit poſita inclinatione qualicunque crurum extremorum verſus horizontem. Noſtra Theoria totam rem ſine ulla reſtrictione complectitur, tubos conſiderans in ſingulis locis directione ſeu poſitione atque amplitudine pro lubitu variabiles: oſtenditur dein, quibus in caſibus fiat, ut oſcillationes diverſæ excurſionis ſint Iſochronæ, quibus ſtantibus longitudo penduli ſimplicis Iſochroni generaliſſime determinatur. Sed & præter hoc oſcillationum genus in ſubſequente ſectione quædam aliæ examini ſubjiciuntur, veluti illæ, quæ fiunt in tubis aquæ infinitæ vel etiam terminatæ immerſis, in quibus ſingulari circumſpectione opus eſt, qua adhibita omnia phænomena calculo ad amuſſim reſpondent, eadem vero neglecta tantus fit inter ea diſſenſus, quantus eſt inter leges motus, quæ pro corporibus perfecte elaſticis, iiſque quæ pro mollibus valent.

§. 11. Poſt hæc ad alia magis compoſita progredior, motum nempe fluidorum conſiderans ſive homogeneorum ſive heterogeneorum, quæ per unam aut plura foramina transfluere coguntur, priusquam ejiciantur in aërem, ubi regula illa communiter recepta de ſaltu aquæ ad ſupremam aquæ libellam vehementer fallit, ceſſantibus etiam legibus preſſionis ordinariis. Horum autem omnium apud Authores ne veſtigium quidem reperitur, niſi quod Mariottus habet, loco ſupra citato *part. IV. p.m. 442. de motu aquar.* ubi quidem fluxum aquarum retardari, fuiſſe ſe experientia edoctum, teſtatur, ſimul autem manifeſtat, quam procul abfuerit a vera horum motuum Theoria, & videtur ſane hæc Theoria omnium fere principiorum, adhuc in rebus ſimilibus adhiberi ſolitorum, vim eludere, ita ut nihil ſit, quod noſtrorum præſtantiam magis con-

firmet:

firmet: de eorum veritate enim experimenta instituta me amplius dubitare non sinunt. Non deest autem hisce meditatis sua utilitas, quandoquidem magni momenti esse possint in perficiendis machinis hydraulicis.

§. 12. Sequuntur commentationes de machinis hydraulicis, quibus potissimum monstratur, certum quendam perfectionis terminum esse, ultra quem ire non liceat; defectus autem ab ultimo hoc perfectionis gradu in multis machinis maxime receptis calculo numerico subjiciuntur, additis regulis seu præceptis, ad quæ in construendis novis machinamentis animus sit advertendus: exempli loco affertur notissima per totum orbem machina Marlyensis, de qua monstratur, si modo descriptionibus fidendum sit, quod non ultra quinquagesimam sextam prope partem suppeditet ejus aquæ quantitatis, quam cæteris paribus machina perfectissima theoretice subministrare queat. Speciale etiam examen instituitur de machina ab antiquissimis temporibus ad nostram usque ætatem usitatissima, Cochlea nimirum Archimedis, attentione Geometrarum non indigna, tam ratione eorum, quæ ad Geometriam puram, quam quæ ad Hydraulicam pertinent.

§. 13. Succedunt specimina quædam de motu fluidorum elasticorum, veluti aëris & pulveris pyrii accensi, præmissis iis, quæ ad naturam horum fluidorum pertinent; quæ vero ipse non aliter, quam ut hypotheses physicas considero, de quibus nihil confidenter affirmabo. Propositiones & Problemata hujus sectionis nova sunt, & eo selecta animo, ut multis quæstionibus physicis illustrandis, aut etiam solvendis occasionem præbere possint. Adjiciuntur quædam de æstimatione virium vivarum fluidis elasticis insitarum, quæ aliquando fortasse in praxi mechanica nonnullius usus erunt: monstratur enim, unius v. gr. libræ pulveris pyrii accensi effectum in elevandis ponderibus majorem esse posse, quam vel centum homines robustissimi labore continuo intra unius diei spatium efficere possint.

§. 14. Agitur porro de fluidorum motu circulari, ut & de fluidis, quæ in vasis motis stagnant; variaque alia intermiscentur. Quæ autem de motu circulari proferuntur, inservire quodammodo possunt ad phænomena gravitatis per vortices explicanda; cætera valeant, quantum poterunt.

§. 15. Præmissa Theoria motuum, rursus ad æquilibria fluidorum descenditur, sed fluidorum motorum, quorum leges exhibitæ nondum fuerunt. Mirum est, cum alias motus ex pressione definiatur, hic inversa methodo presfionem ex motu peti, prius ex circumftantiis definiendo; nec crediderim aliam viam tuto iniri poffe præter eam, quam ego fecutus fum: confideravi autem canalem, per quem aquæ fluunt eo in loco eoque temporis puncto, quæ quæftioni conveniunt, amputatum; pofteaque per regulas noftras præmiffas accelerationem indagavi particulæ aquæ imminentis, proximeque effluxuræ. Ex ifta acceleratione colligere licebat compreffionem illius particulæ aqueæ, quæ compreffio per naturam fluidorum æqualis eft preffioni in latera canalis. Cognita hac preffione apparet, quid fieri debeat, fi canalis eodem in loco perforatus fuerit, tubulusque foramini refpondeat; fore nempe, ut aqua in eo afcendat ad certum ufque gradum ftagnans in tubulo, & ab aqua inferius per canalem prætérfluente fuftenta, fic, ut hic æquilibrium adfit inter aquas fluentes & ftagnantes: hoc vero nomine Theoriam iftam *hydraulico-ftaticam* commode vocari poffe exiftimavi. Notari porto meretur, ipfam hanc Theoriam fundamentum rurfus effe & fontem aliorum motuum antehac incognitorum. Theoremata, quæ exponuntur, non nova folum, fed & pleraque inexpectata funt, quorum omnium veritatem nec ipfe plane mihi perfuadere potui, priufquam experimenta inftituiffem, quæ mihi omnem fcrupulum demebant. Habent autem infignem ufum, quandoquidem iis innititur vera preffionis aquarum, per aquæductus feu rivos fluentium, æftimatio, hincque deducendæ tuborum firmitates requifitæ. Inde quoque pendent accuratæ menfuræ aquarum per modulos, rivo lateraliter infertos, erogatarum: in Phyfiologia rectius jam intelligentur, quæ pertinent ad motum humorum in corpore animali, & quæ funt alia.

§. 16. Denique progredior ad alios quosdam modos, quibus aqua nifum facere poteft, explicandos: ita nempe aqua, dum per foramen effluit, in contrarium premit vas non aliter, atque globus retropellit tormentum, ex quo exploditur: iftius retropulfionis plures proprietates deteguntur novæ, quæ preffionum naturam egregie illuftrant, earumque leges, quas affectant, generales in mechanicis rem iftam ferio meditantibus indicabunt. Has difquifitiones feci, quia mihi vifum eft, poffe ea novæ aliquando navigationi fine remorum, aut venti adminiculo excogitandæ occafionem præbere; qua de re fuo loco pauca quædam afferam, etfi non ignoro, omnium hujusmodi rerum primordia per fe plerifque videri ridicula. Tandem etiam de vi aquarum ex impulfu hincque nato renixu, quam corpora in fluidis mota offendunt, Theoremata quædam adjiciuntur.

§. 17.

§. 17. Et hæc quidem sunt, quæ mihi ex admissis principiis geometricam deductionem pati visa sunt. Quoniam vero nihil est in Theoria tam rigorose demonstratum, quod non in applicatione ad corpora restrictionem aliquam postulet, ideo facile apparet, nec ullam Theoriam de fluidis expectandam esse, quæ omnibus mensuris experientia cognitis plenissime satisfaciat; cujus rei memores esse velim, qui Theoremata nostra experimentis confirmare voluerint. Ubique invenient quidem aliquem consensum, sed non perfectum, eumque modo strictiorem, modo laxiorem, pro rerum circumstantiis. Quoties autem ipse aliquod experimentum effeci, ante omnia mecum perpendi, quousque principia Theoriæ cum casu proposito congruerent; atque sic me nunquam aut rarissime eventus fefellit. Non solum enim prævidere solebam, in quam partem futura esset differentia, si quæ notabilis esse debebat, sed & quanta; quod ipsum, si recte judico, satis manifestat, fluida affectare quidem leges, quas ipsis præscriptas esse ponimus, obstacula autem ubique offendere nunc majora, nunc minora. Cæterum experimenta institui non pauca, quorum singula in fine sectionis, ad quam pertinent, locavi: præsertim vero sollicitus fui, in propositionibus antea incognitis & plerisque sat paradoxis confirmandis. De experimentorum fide non est, quod quis dubitet, cum præcipua coram Amicis eaque post publicatam Theoriam fecerim; magnam tamen experimentorum, quæ animo concepi, partem, quando per singula ire non licet, aliis relinquens instituendam. Perlectis nostris propositionibus quisque sibi finget innumera, neque proin opus esse judicavi, omnia, qualia sunt a me desiderata, exponere; exposui tamen aliqua.

§. 18. Jam vero tandem principiorum, quorum toties mentionem fecimus, ratio reddenda est. Præcipuum est *conservatio virium vivarum*, seu, ut ego loquor, *æqualitas inter descensum actualem ascensumque potentialem*: Utar hac posteriore voce, quia idem quod altera significat, sortem autem apud nonnullos Philosophos, qui vel ad solum *vis vivæ* nomen moventur, magis benignam fortasse experietur. Puto, hic e re nostra fore, hac de re paulo copiosius dicere.

§. 19. Postquam Galilæus docuisset, corpus, sive verticaliter, sive super plano utcunque incurvato, descendens eandem velocitatem acquirere, modo altitudo lapsus sit eadem, quod ex natura pressionum demonstrari potest, Hugenius eadem hac propositione, sed generaliori pro hypothesi feliciter usus

 est

eſt in eruendis legibus motuum corporum elaſticorum ex percuſſione, nec non in ſtabiliendo centro oſcillationis penduli compoſiti; protulit autem axioma hoc ſuum talibus verbis: *Si pondera quotlibet vi gravitatis ſuæ moveri incipiant utcunque, ſingulaque rurſus ad quietem ſponte reducantur, centrum gravitatis ex ipſis compoſitâ ad priſtinam altitudinem rediturum eſſe*, ubi per vocem *utcunque* intelligit, *ſive ſe percutiant inter deſcenſum, ſive premant, aliove modo in ſe invicem agant corpora.* Ex iſto axiomate ſtatim ſequitur principium conſervationis *virium vivarum*, quod ipſe etiam Hugenius demonſtravit, & quo aſſumitur: *Si pondera quotlibet vi gravitatis ſuæ moveri incipiant utcunque, ſingulorum velocitates ubique tales fore, ut producta, ex earum quadratis in ſuas maſſas collecta, ſint proportionalia altitudini verticali, per quam centrum gravitatis ex corporibus compoſitæ deſcendit, multiplicatæ per maſſas omnium.* Mirum eſt, quantam habeat hæc hypotheſis in Philoſophia mechanica utilitatem, quod, ſi quis alius, ſane Pater meus recte animadvertit, qui id ſparſim, imprimis autem in *Diſſertatione Pariſiis edita de legibus motuum* & *in Tom. 2. Comment. Acad. Imp. Sc. Petrop.* oſtendit, idemque eſt, quod pro inveſtigandis Legibus motuum, ex propria gravitate ortorum, in fluidis adhibui; poſui enim velocitates particularum conſtanter tales eſſe, ut, ſingulis verticaliter ſurſum motis ad ſtatum quietis usque, centrum earum gravitatis commune ad priſtinam altitudinem aſcendat: malui autem ob rationem ſupra dictam hanc hypotheſin verbis Hugenianis quam Paternis accommodare, eamque nomine *æqualitatis inter deſcenſum actualem aſcenſumque potentialem* inſignire, quam altero *conſervationis virium vivarum*, quod etiamnum aliqui, præſertim in Anglia, neſcio quo fato, faſtidiunt. Mihi quidem in tota doctrina Leibnitiana de *viribus vivis* nihil eſſe videtur, de quo non omnes, ſuo tamen quivis loquendi modo, conveniant, quod, ni fallor, clare oſtendi in *Comm. Acad. Sc. Imp. Petrop. Tom. I. p.* 131. *& ſeq.* quem locum hic allegare volui, ne quis Lectorum ſe verbis offendi patiatur, ſciatque nihil a me accipi, quod in Mechanica receptum non ſit ab omnibus, & quod non neceſſario nexu cohæreat cum eo, quod jam Galilæus poſuit, cum ſtatueret, incrementa velocitatum proportionem ſequi compoſitam ex preſſionibus & momentis temporum.

§. 20. De cætero quamvis principium prædictum univerſale ſit, non tamen eſt ſine circumſpectione adhibendum, quia ſæpe contingit, ut motus tranſeat in materiam alienam. Ita verbi gratia poſitio illius valet pro regulis motuum ex percuſſione eruendis, ſi modo corpora ſint perfecte elaſtica;

ſed

ſed cum talia non ſunt, facile eſt videre, partem *virium vivarum* ſive *aſcenſus potentialis* in compreſſionem corporum impenſam corporibus non reſtitui, ſed materiæ cuidam ſubtili, ad quam tranſiit, impreſſam hærere: ſi tamen res recte conſideretur, quum ratio cognoſcitur, quæ eſt inter partem corporibus reſiduam, eamque quæ ad materiam ſubtilem tranſiit; apparebit, facile occurri poſſe iſti incommodo, ſicque recte definiri leges motuum pro corporibus mollibus. Simile quid ſuccedit in motu aquarum computando, ubi quandoque manifeſtum eſt, partem *aſcenſus potentialis* continue perdi; cujus utique rei in ſubducendo calculo ratio habenda eſt: ad quod probe attento multa de aquarum fluxu Theoremata nova mihi contigit detegere, quæ videre eſt in Sect. Sext. & Sept. & de quibus nondum video, an ulla alia methodo demonſtrari nedum excogitari poſſint.

§. 21. Sic igitur non incautus principio noſtro uſus ſum, hocque modo non ſolum de motu aquarum, ſed & de earum preſſione, quod mirum videri poteſt, multa antea incognita ſe offerunt, quæ nondum inſtituta Analyſi nemo facile præviderit nec expectarit. Quum vero fit, ut *aſcenſus potentialis* nec omnis conſervari poſſit ex rei natura, nec prævideri, quanta pars abſorbeatur, non ſatis accurate motus fluidorum determinari poteſt, nec puto, ulla alia methodo poſſe. Igitur Lectorem cautum eſſe velim in corollariis ex Theoria noſtra deducendis, quæ ſæpe propter mutatas circumſtantias non accurate cum experimentis convenire poterunt.

§. 22. Ex præmemoratis jam ſatis liquet, ex noſtra methodo requiri, ut ſingularum particularum fluidi definiatur velocitas ex aſſumta velocitate, quæ eſt aliquo in loco, veluti in loco effluxus. Neceſſe proin fuit, aliam ſuperaddere hypotheſin, quæ hæc eſt: poſtquam ſcilicet mente concepimus diviſum fluidum in ſtrata, ad directionem motus perpendicularia, ponemus fluidi particulas ejusdem ſtrati eadem velocitate moveri, ita, ut ubique velocitas fluidi reciproce proportionalis ſit amplitudini vaſis reſpondenti. Uſitata eſt hæc hypotheſis, quamvis cæterum notum ſit, fluidum ad latera vaſis paullo tardius, in medio autem velocius moveri, quod ab attritu fit, aliasque etiam exceptiones ſubinde eſſe faciendas; error tamen notabilis ab hujusmodi defectibus rariſſime poteſt oriri.

§. 23. Finiam hæcce de hypotheſibus noſtris præmonita recenſione phænomenorum, quæ conſervationem *virium vivarum* in motu fluidorum aliquantum & illuſtrare & confirmare poterunt: eorum quidem in ipſo opere plurima occurrent, quæ autem ob calculum, quem poſtulant, non allegabo. Triviale autem & obvium eſt, quod de gutta, in aquam ſtagnantem delapſa, obſervatur: orbes nempe excitat in ſuperficie aquæ ſtagnantis, horumque eo plures, quo vel major fuerit gutta, vel altius delapſa, nec dubium eſt, quin iſti orbes ſine fine ſe propagaturi eſſent, niſi tenacitas fluidi, aliaque ſimilia obſtaculo eſſent. Quandoque etiam alium effectum ab hujusmodi ſtillis obſervare licet, dum plures guttulæ minores a ſuperficie aquæ inferioris in altum projiciuntur, tuncque conſtanter apparet, quod præſertim huc pertinet, eo altius aſſurgere guttulas, quo pauciores numero atque minores volumine fuerint, & cum altitudo lapſus eſſet duorum pedum, ſæpius guttulæ minores ultra altitudinem lapſus aſcendebant, ſtillante præſertim aqua per foramen magnum. Hic notatu quoque dignum eſt illud, quod de particula aquæ per canalem tenuem, eumque v. gr. horizontalem, atque in ea extremitate, verſus quam aqua fluit, operculo perforato opertum obſervatur. Scilicet eo temporis puncto, quo aqua ad operculum usque pervenit, magno impetu paucæ guttulæ exiliunt, moxque omnis aquæ motus ſiſtitur; facile autem quis ſuſpicari poſſet, aquam foramini imminentem ſua velocitate moveri pergere, reliquam ſiſti, id vero conſervationi *virium vivarum* minime reſponderet; reſpondet autem egregie vehemens iſte aquæ effluxus *momentaneus*, vel quaſi exploſio: de his alibi plura.

§. 24. Hæc ſunt, quæ de hypotheſibus noſtris, earumque tum præſtantia tum defectu volui in anteceſſum monere. Supereſt ut quædam dicam de indole fluidorum, quippe circa quæ lucubrationes noſtræ verſabuntur, non quod eam me aliis magis perſpectam habere putem, ſed quod nefas exiſtimem, a more hoc ſcriptoribus omnibus ſolenni recedere. Et primo quidem hoc omnes convenire ſolent, motum fluidis quibusvis ineſſe inteſtinum, ſine quo nemo profecto tantam fluiditatem, efferveſcentias diverſorum fluidorum, diſſolutiones ſolidorum fluidis ſubmerſorum, evaporationes, aliaque phænomena infinita recte aſſequetur; hinc pleræque res ſolidiſſimæ a ſufficiente calore, qui omnia in motum rapit, liqueſcunt: facit autem motus iſte inteſtinus, ut particulæ ſibi non ſint contiguæ, ſed quaſi volitent, quo fit, ut ſine frictione a minimo impulſu loco cedant, quod minime ſuccederet, poſitis iisdem particulis inter ſe, ſicut in acervo arenæ, contiguis. Ita facile intellectu

lectu est, pollinem ex putaminibus ovorum in patella igni superimpositum lac bulliens, quod dicitur, mentiri. Quo intensior autem est calor, eo vehementior utique est motus particularum, hæque majori intervallo a se invicem dispersæ; quod convenit cum dilatatione omnium fluidorum ab aucto calore, eorundemque contractione ex frigore, cui legi ipsa etiam aqua nondum congelata subjicitur: quod autem, dum congelatur, contrariæ sit indolis, id ex alia causa, fortuito superveniente, deducendum videtur, nempe ex eo, quod aqua in interstitiis suis particulas foveat aëreas, quæ sic volumen aquæ non augent, prouti saccharum in aqua solutum non auget ejusdem volumen; quod tempore instantis congelationis particularum aquearum motus minuatur; quod sic eædem particulæ magis ad se invicem accedant, adeoque ex interstitiis suis particulas aëreas pellant, quæ alibi minus commode locatæ volumen augere possunt, prouti saccharum nondum solutum volumen auget aquæ, cui permistum est. Hinc commode ratio deducitur, cur glacies aquæ ab aëre ante congelationem bene purgatæ non specifice levior, quin potius gravior fiat. Egregia autem experimenta circa solutionem veram aëris in aqua ad punctum saturationis usque instituit Mariottus, eaque in Tractatu suo *de motu aquarum* recensuit. Suspicioni igitur locus est, fluida (ut dixi) congelari, cum cessat vel valde diminuitur motus intestinus, tum enim particulæ in se invicem collabuntur, fiuntque contiguæ, simulque ex interstitiis particulas heterogeneas, si quæ ibi commorentur, expellunt; nec tamen clarius hinc intelligitur durities corporum congelatorum, quinimo videtur, cessante isto motu corpus mediæ naturæ inter fluidum & solidum, nisi aliud quid accedat, fieri, & comparandum cum acervo arenæ: quid autem id rei sit, ne conjectura quidem assequor, licebit interim fingere quaslibet particulas ad se gravitare, vel, ut voce Anglis usitata utar, se invicem attrahere, attractionemque insigniter crescere, accedentibus ad se invicem particulis; diversæ esse virtutis in diversis corporibus, minoris v. g. in oleis quam in aquis, quarum glacies durior est; fluida citius & facilius congelari, quorum particulæ vel fortius se attrahunt vel motu lentiori agitantur. Exinde conjicere liceret, aquam saccharo vel sale imprægnatam tardius congelari, quod particulæ sacchari vel salis, particulis aqueis interpositæ, harum attractionem diminuant, neque hæ conjungi possint, siccidumque congelari, quin particulæ heterogeneæ loco pellantur: & certe omnibus in fluidis,

quæ

quæ particulis heterogeneis sunt impregnata, tempore congelationis fit quædam partium ex poris expulsio, seu secretio atque præcipitatio. Infinita sunt alia corporum tum solidorum tum fluidorum phænomena, quæ mire admodum cum principio mutuæ gravitationis conveniunt, ita, ut dolendum sit, principium ipsum tam alte supra mentem humanam positum esse, ut neminem esse putem, qui id ullo modo intelligere possit.

§. 25. Denique hic monuisse conveniet, tractatum hunc ut Physicum potius quam Mathematicum mihi considerari, nec proin consultum me duxisse, methodum Geometricam in hypothesibus, definitionibus cæterisque apparatibus præmittendis nimium affectare, & ubique ordinem sermonemque Geometrarum sequi, qui solent ab ovo ordiri, propositionibus complecti, & eo ordine omnia pertractare, ut ex primis præmissis singula rite deducantur, nihilque indemonstratum post se relinquant, quamvis id a tot aliis jam demonstratum fuerit. Non mihi hæc cura fuit ratione eorum, quæ ab aliis tradita sunt, sive definitiones fuerint & axiomata, sive etiam theoremata, non omisi tamen demonstrationes eorum, quæ nova sunt, imo etiam in prima sectione apponuntur demonstrationes Theorematum, ab aliis passim demonstratorum; & cum quidam occurrant termini, ab aliis non explicati nec usitati, horum definitiones in ipso textu exhibebo. Cætera modo sub forma Propositionum, Theorematum, Problematum, Corollariorum, Scholiorumque pro more Geometrarum proponam, modo etiam sermone continuo explicata dabo.

Unum superest, de quo Lectorem præmonitum potissimum volo: non potuisse me huic operi eam adhibere sive diligentiam sive attentionem, quam debuissem, & quam ipse desideravi. Nullus adeoque dubito, quin nonnulli irrepserint errores, dum calculos ponerem, quos, spero, nemo sinistre explicabit: aliquos, qui in oculos incurrerunt, dum tractatum leviter relegerem, ipse correxi; alios tamen etiamnum superesse mihi persuadeo.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO SECUNDA,
Quæ agit de fluidis ſtagnantibus eorumdemque æquilibrio tum inter ſe, tum ad alias potentias relato.

Theorema I.

§. I.

SUperficies fluidi ſtagnantis horizonti eſt parallela.

Demonſtratio.

Contineat vas A B C D (Fig. 1.) fluidum E B C F, cujus ſuperficies E G F, ſi fieri poſſit, horizonti non ſit parallela: conſideretur guttula in loco eminentiori a, quæ gravitate ſua verticaliter deorſum ſollicitatur vi repræſentata per $a\ c$, reſolvatur hæc vis in duas collaterales $a\ d$ & $a\ b$ alteram perpendicularem ad ſuperficiem, alteram quæ tangat illam: Cum autem nihil adſit, quod huic vi poſteriori reſiſtat, hæc non poteſt non effectum ſuum exerere, ipſamque adeo guttulam verſus E trahere, quod eſſet contra hypotheſin ſtagnationis, ſeu ſtatus permanentis: Igitur neceſſe eſt, ut vis tangentialis $a\ b$ ubique nulla ſit, quod non aliter contingit, quam cum ſuperficies tota horizonti eſt parallela. Q. E. D. Fig. 1.

Corollarium.

§. 2. Hinc intelligitur veritas propoſitionis generalis, quod nempe ſuperficies fluidi, cujus partes viribus quibuscunque ſollicitantur, ſe ita ſemper componat, ut quælibet guttula, in ſuperficie poſita, trahatur ſub directione, ad ſuperficiem perpendiculari.

Theorema 2.

§. 3. Fluidum homogeneum, duobus tubis communicantibus utcunque formatis inclusum, ad æquilibrium est compositum, quando ambæ superficies ad libellam positæ sunt, id est, æqualem à puncto vasis infimo distantiam verticalem servant.

Demonstratio.

Fig. 2. Sit fluidum vasi ABC, (Fig. 2.) ex duobus cruribus seu tubis communicantibus composito inclusum, ponaturque in utroque crure ad eandem altitudinem positum: dico non posse situm hunc mutari, quin corpus aliquod grave ex situ inferiori in altiorem se recipiat, quod esset contra naturam gravium; Nam si superficies E descendat in *e*, & ab altera parte D ex D elevetur in *d*, quoniam pars vasis reliqua eodem fluido ante & post situm mutatum plenum est, omnis mutationis effectus in hoc situs est, quod particula E*e* ascenderit in D*d*.

Cæterum idem quoque liquet ex Theorêmate primo, quandoquidem in aqua stagnante tubus utcunque formatus fingi potest, in quo utique aqua situm servabit, quem antea habuit, cum perinde sit, sive aqua tubo inclusa, coërceatur lateribus tubi, sive circumstagnante aqua.

Scholium I.

§. 4. Si in demonstratione prima præcedentis paragraphi tota massa DBE situm suum commutasse concipiatur cum situ *d*B*e*, facile demonstratur centrum gravitatis totius massæ in situm altiorem ascendisse, quod non minus absurdum est: Quoniam autem in nostra demonstratione nulla est particula in E*e*, quæ non ascenderit post mutatum situm, existimavi strictiorem & clariorem fore demonstrationem, si centri gravitatis nulla consideratio habeatur.

Scholium 2.

§. 5. De tubis capillaribus phænomena habemus singularia; aqua

aqua enim aſcendit ſupra libellam in tubo ſtrictiori, cujus altera extremitas aquæ ſubmergitur; Mercurius vero libellam non attingit. Hæc vero cum aliquando attente perpenderem, in eandem præter propter incidi cauſam, quam olim Patruus meus Jacobus Bernoulli, beate defunctus dederat in tractatu ſuo *de gravitate ætheris*, nempe aquam in tubo ſtrictiori ideo ultra libellam aſcendere, quod numerus particularum aëreo-æthierearum in baſi columnæ, quæ aquæ in tubo ſupereminet, minor ſit numero particularum in ſimili baſi extra tubum; hoc vero intelligitur ex eo, quod poſitis juxta ſe globulis in tabula horizontali, ſi circino cirulus fiat, globulorum aliquot neceſſario excludantur, quia dividi nequeunt: Sunt vero preſſiones columnarum aëreo-ætherearum (quarum baſis altera eſt in tubo, altera extra tubum) ut baſes, id eſt, ut numeri globulorum in baſibus: unde ſi numerus globulorum in prima baſi ſit $= a$, in altera $= a + b$, preſſio columnæ prioris $= g$, erit preſſio alterius columnæ $= \frac{a+b}{a} g$, hinc differentia preſſionum $= \frac{b}{a} g$, cui æquari debet altitudo aquæ ſupra libellam. Hæc ut rectius intelligantur, conſiderandum erit eſſe g proportionalem quadrato diametri, quæ reſpondet ſuperficiei fluidi tubo incluſi, & eidem quadrato ob extremam globulorum parvitatem proportionalem quoque eſſe a, ſic ut ratio g ad a cenſenda ſit conſtans, atque proin altitudo aquæ ſupra libellam proportionem ſequi debeat ipſius b; eſt vero, quod per ſe patet, b ut peripheria ſuperficiei fluidi tubo incluſi, erit igitur altitudo ſupra libellam, ut eadem illa peripheria, id quod experientia jam diu confirmavit. Si porro nunc diverſa conſideremus fluida, videbimus eo tortuoſiorem atque proin majorem eſſe præmemoratam peripheriam, quo majores ſunt fluidi particulæ, & cum à magnitudine hujus peripheriæ pendeat altitudo fluidi ſupra libellam, percipimus, cur hæc altitudo in eodem tubo non ſequatur rationem gravitatis ſpecificæ inverſam: ita ſi idem tubulus immergatur ſpiritui vini & aquæ, ille minus aſcendit, quam hæc, cum tamen ob minorem ſuam gravitatem ſpiritus aſcendere deberet magis; hoc vero indicat, ſi recte rem aſſecutus ſum, minores eſſe particulas ſpiritus vini, quam aquæ: Nunquam tamen meo judicio aſcenſus ſupra libellam in ullo fluido mutari poteſt in deſcenſum, & omnia fluida ejusdem eſſe hac in re indolis, crediderim, niſi alia quædam cauſa, nondum hactenus conſiderata, ſupervè-

 niat,

niat, & si ex nostra hypothesi argumentamur, dicendum erit, Mercurium quoque supra libellam fuisse ascensurum, si modo particulæ ejus non majori vi se invicem attraherent, quam particulæ aquæ; huic enim attractioni omnia tribuo, quæ Mercurium in diversa ire faciunt. Experimenta, quæ ad hanc sententiam me manuduxerunt, apponam in fine hujus sectionis.

Lemma.

Fig. 3. §. 6. Sit tubus cylindricus ABDC (Fig. 3.) utcunque versus horizontem inclinatus, cujus fundum CD ad latera tubi sit perpendiculare, plenusque intelligatur aquâ usque in AB; dico pressionem omnis aquæ in fundum CD esse æqualem ponderi cylindri aquei, cujus basis est CD, & cujus altitudo est verticalis DE, terminata ab horizontali BE.

Demonstratio.

Cum forma tubi sit cylindrica, & fundum insuper ad latera tubi perpendiculare, quilibet videt, quod actio fluidi in fundum eadem sit, quam haberet cylindrus solidus ejusdem ponderis super plano inclinato, constat autem ex mechanicis, pressionem cylindri solidi in fundum eam esse, quæ in propositione definitur, ergo & talis erit actio fluidi, si modo non respiciatur adhæsio fluidi in lateribus tubi, ejusdemque indoles ratione tubulorum capillarium, à quibus animum abstrahimus. Q. E. D.

Theorema 3.

Fig. 4. §. 7. Sit jam generaliter vas utcunque formatum AHMB (Fig. 4.) & aqua repletum usque in DE, erit pressio aquæ in singulas vasis particulas, veluti in G aut H, semper æqualis ponderi cylindri aquei, cujus basis est superficies illius particulæ, & cujus altitudo æqualis est distantiæ verticali ejusdem particulæ à superficie aquea.

Demonstratio.

Primo concipiatur in G tubulus cylindricus CG perpendiculariter vasi insistens, productaque ED, intelligatur hic tubus simili liquore plenus demum attolletur pondus; erit autem æquilibrium, cum locus contactus cd se habet ad orificium o, ut pondus B ad pondus cylindri aquei altitudinis FR super basi o insistentis. Pendet itaque absoluta elevationis determinatio à structura vesicæ, quæ si exempli gratia composita fuerit ex filamentis perfecte flexibilibus, extensionemque nullam admittentibus, simulque figuram naturalem habuerit Sphæricam, facile apparet, fore spatia contactus cnd & gpe æqualia & corrugata, partemque reliquam expansam, habituram esse formam Zonæ sphæricæ; Atque hinc per Geometriam deducitur quantitas elevationis np, quæ nulla erit, quamdiu circulus maximus vesicæ minorem habuerit rationem ad orificium o illa, quæ est inter pondus B & pondus præfati cylindri aquei, nec prius tota explicabitur vesica quam altitudo fuerit infinita, id est, nunquam. Si vero fibræ alius sunt indolis, aliter se res habet, quod multi non satis considerarunt, quibus de figura vesicæ inflatæ sermo fuit, eamque cavernulis muscularibus in œconomia animali applicare voluerunt, quâ de re nunc paullo fusius agam.

Fig. 6. §. 10. Fuerit vesica DC (Fig. 6.) eidemque appensum pondus P, simulque alligata tubulo DA, cujus rursus longitudinem compendii ergo incomparabiliter majorem longitudine DC fingemus. His positis facile quidem quivis perspicit, repletis vesica & tubulo fore, ut illa intumescat, pondusque appensum P elevet: nemo autem intelliget statum æquilibrii, figuramque ventricosam, nisi plane intelligatur structura vesicæ ejusdemque fibrarum, quæ cum ita sint, casus aliquot singulares examinabimus, qui frequentius occurrere possunt.

Casus I.

§. 11. Si vesica composita fuerit ex fibris longitudinalibus DpC, DmC &c. instar meridianorum in punctis D & C, ceu Polis concurrentibus æqualibus, perfecte flexibilibus & uniformibus, quarum singulæ inter se proximæ minimis connectantur fibrillis transversalibus, hisque ita laxis, ut minima vel quasi nulla vi sufficientem extensionem admittant. Sic quælibet fibra DpC incurvabitur in figuram elasticæ, totaque vesica formam assumet solidi, quod generatur ex revolutione istius curvæ circa axem DC. Si porro altitudo AD est infinita, fit elastica DpC rectangula & tunc est grassities maxima vesicæ ad longitudinem axis DC ut 25 ad 11 præter propter

pter atque longitudo arcus DpC est ad eundem axem proxime ut 5 ad 2, ita ut maxima elevatione ponderis vesica tribus quintis partibus decurtetur.

Casus II.

§. 12. Si positis cæteris, ut antea, minima filamenta transversalia *no*, *mp*, &c. quæ sunt perpendiculares ad fibras longitudinales, extensioni resistant, apparet non posse figuram fibræ D*op*C determinari, quin duo potentiarum genera unicuique puncto applicata considerentur, quorum alterum curvæ perpendiculariter insistit, & filum extrorsum premit, alterum ad axem curvæ DC, est perpendiculare & introrsum trahit: facile etiam intelligitur infinitas posse harum pressionum excogitari leges, ut ad curvam quamvis datam fibra D*op*C se componat, atque adeo etiam v. gr. ad circularem, quæ figura à plerisque Physiologis tribuitur fibrillis, quæ pertinent ad machinulas musculares: Sed est alius etiam modus, quo fibra longitudinalis D*op*C acquirere potest figuram arcus circularis, nempe cum omnino absunt fibrillæ transversales *np*, *mp*, &c. Sic enim dum inflatur vesica, hiatus fit inter duas fibras longitudinales proximas D*op*C & D*nm*C, per quem fluidum erumpit, simul autem, cum non satis cito effluere possit, fibras extendit, easque ad figuram circularem componit: atque hoc in casu maxima vesicæ decurtatio, quæ in priori casu fuit $\frac{3}{5}$ totius longitudinis vesicæ non inflatæ, nunc tantum est proxime $\frac{4}{11}$.

§. 13. Sequitur ex hisce, difficile esse, ut figura vesicæ inflatæ, cui pondus appensum est, recte determinetur, quandoquidem nemo sit, qui indolem minimarum fibrillarum perfecte cognoscere possit: transcribam tamen huc exempla quædam, quæ maxime videntur probabilia, ex schedis meis sine demonstratione, quam si quis desideret, reperiet in *tom.* 3. *Comm. Acad. Sc. Petrop.* Ante omnia autem æquationem dabo ad curvam, quæ ex duobus potentiarum generibus, ut dixi in præcedente paragrapho, iisque quamcunque legem observantibus formatur.

§. 14. Sit igitur filum AEG (Fig. 7.) duobus punctis A & G affixum; Fig. 7.
ducatur recta AG: sintque duo puncta in filo infinite propinqua D & E, ex quibus agantur ad AG perpendiculares DB & EC; lineola autem DF sit lineæ AG parallela. Intelligatur singulis punctis D vel E applicatas esse duas

po-

potentias utcunque variabiles, quarum altera sit ubique ad curvam, altera ad A G perpendicularis: priorem ponemus in puncto D æqualem A, in puncto E æqualem $A + dA$, alteram in puncto $D = C$, in puncto $E = C + dC$: Sit porro $AB = x$, $BD = y$, $AD = s$, $BC = dx$, $FE = dy$, $DE = ds$, quod elementum curvæ constantis magnitudinis ponatur; Radius Osculi in puncto $D = R$, in puncto $E = R + dR$. Dico æquationem ad curvam fore hanc $-AdR - RdA = (RdCdx + 2Cdyds + CdxdR)\,ds$, vel posito $CRddx$ pro $Cdyds$ (est enim $R = \frac{dyds}{ddx}$) habebitur $-AdR - RdA = (RdCdx + CRdds + Cdyds + CdxdR) : ds$, sive $\frac{-ARds - RCdx}{ds} = \int Cdy$.

§. 15. Intelligitur ex præcedente æquatione; quod cum potentiæ, quæ sunt ad curvam perpendiculares, solæ agunt, fiat $AR =$ constanti quantitati, quia nempe sic fit $C = o$: tunc igitur radius osculi ubique sequitur rationem inversam potentiæ respondentis. At si potentiæ ad axem perpendiculares solæ adsunt, tunc evanescente littera A fit $-\frac{RCdx}{ds} = \int Cdy$. Potest autem hæc æquatio integrari & ad hanc reduci formam $RCdx^2 =$ constanti quantitati; ex qua apparet potentiam ductam in radium osculi ubique esse in ratione reciproca quadrati sinus, quem applicata facit cum curva. Similiter æquatio canonica integrationem admittit, cum potentiæ, quæ ad axem perpendiculares sunt, omnes inter se sunt æquales seu proportionales elemento curvæ ds. Ita enim posito $dC = o$, obtinetur $-AdR - RDA = 2ndyds + ndxdR$, intelligendo per n constantem quantitatem, qua æquatione recte tractata fit $nydy + mmdy - nsds = ds\int Adx$, ubi m constans est ab integratione proveniens.

Si præterea potentiæ ad curvam normales ponantur applicatis y proportionales, poterit ulterius reduci postrema æquatio ad hanc

$$-dx = \left(2ff - \frac{gyy}{b}\right) dy : \sqrt{(2ny + 2mm)^2 - \left(2ff - \frac{gyy}{b}\right)^2},$$

cujus constantes f & m casibus particularibus erunt applicandæ, dum n & g pendent à relatione potentiarum in puncto aliquo: unde si $g = o$, oritur catenaria, & si $n = o$ prodit elastica: generaliter vero inservit æquatio ad curvaturam lintei uniformiter gravis, cui fluidum superincumbit, determinandam: Casus

ſus ſimpliciſſimus hujus rei eſt, cum ſupponitur $f = m = o$, tunc enim fit $-dx = \frac{-gy\,dy}{\sqrt{(4nnbb - ggyy)}}$ ſeu facta integratione cum additione debitæ conſtantis, $x = -\sqrt{\left(\frac{4nnbb}{gg} - yy\right)} + \frac{2nb}{g}$, quæ eſt æquatio ad ſemicirculum, ad quem nempe ſe linteum accommodabit in ſequenti hypotheſi: Sit filum lintei gravis AEG (Fig. 8.) in ſemicirculum incurvatum, cujus diameter AG Fig. 8. ad libellam poſita ſit; ſuperincumbat filo fluidum usque ad AG, dico ſi fluidi pondus ſit æquale ponderi fili, fore ut filum perfecte flexile & uniformis craſſitiei figuram ſemicircularem conſervet. Quomodo autem pondera fili & fluidi, ut æqualia fiant, efficiendum ſit ex elementis Geometriæ conſtat. Denique ſi ſtatuatur tam potentias A quam C eſſe ubique applicatæ reſpondenti y proportionales (quæ hypotheſis ſane maxime convenire videtur cum vera figura veſicæ in figura ſexta) poterit rurſus æquatio canonica, quæ continet differentialia tertii Ordinis, reduci ad æquationem ſimpliciter differentialem eamque per quadraturas facile conſtruendam. Sit nempe $A = my$ & $C = ny$, dico naturam curvæ ADG in fig. 7. exprimi hâc æquatione

$$dx = (g^3 + \tfrac{1}{2}myy)\,dy : \sqrt{[(f^3 + \tfrac{1}{2}nyy)^2 - (g^3 + \tfrac{1}{2}myy)^2]}$$

in qua literæ conſtantis magnitudinis f & g rurſus ab integrationibus prodierunt: ſit autem valor literæ n negativus, cum æquatio ad veſicæ inflatæ figuram determinandam adhibetur.

§. 16. Nolui his nimis inſiſtere, quod non proxime pertinent ad Hydrodynamicam: Nihil etiam addo de fluidis elaſticis, quia horum theoriam ſeorſim tradere conſtitui; attamen quod ad preſſiones fluidorum elaſticorum attinet, poterunt illæ ex natura fluidorum ſimpliciter gravium ſupra expoſita facile deduci & demonſtrari, fingendo fluidum elaſticitate eſſe deſtitutum, cylindrumque fluidi ſimilis altitudinis infinitæ vel quaſi infinitæ ſuperimcumbere; hæc autem quomodo intelligenda ſint ſuo loco dicemus: Nunc quidem pergo ad id, quod in rebus aquariis potiſſimum quæri ſolet, quanta nempe debeat eſſe firmitas canalium, ut preſſioni aquæ reſiſtere poſſint, ubi præſertim conſiderantur canales, qui aquas ad fontes vehunt, de quibus ego quoque pauca monebo.

§. 17. Probe diſtinguendæ ſunt preſſiones aquarum in canalibus ſtagnan

nantium à pressionibus fluentium, quamvis id nemo adhuc animadverterit, quod sciam; hinc est, quod regulæ à variis exhibitæ valeant tantum pro aquis stagnantibus, tametsi verbis utantur, quæ perinde eas pertinere ad aquas fluentes persuadere possint. Ut vero discrimen utriusque Theoriæ appareat in ipso limine, exemplum quoddam afferam, cujus demonstratio ex
Fig. 9. inferioribus patebit. Sit loco castelli vas amplissimum ABCD (Fig. 9.) aqua repletum usque in EF, & in parte inferiori tubulo cylindrico horizontali MO*mo* instructum, per quem aquæ sine impedimento transfluere posse intelligantur; ducatur verticalis NG terminata ab horizontali EH. His ita præparatis, dico si orificium O*o* totum digito obstruatur, punctum N premi extrorsum secundum totam altitudinem NG; si dimidium orificium obturetur, hanc pressionem quarta sui parte diminui, & si denique remoto digito aquæ liberrime effluant, omnem pressionem evanescere, sic ut totum cum parte aut etiam cum nihilo confundi ab Authoribus soleat. Sed demonstrabo posse pressionem vel negativam fieri, atque ita in suctionem mutari. Quoniam vero id agere non possum priusquam integram theoriam de aquis fluentibus præmiserim, nunc aquas considerabo saltem stagnantes, veluti si orificium O*o* totum fuerit obstructum.

§. 18. Constat autem ex Mechanicis latera tubi MO*mo* (cujus diametrum incomparabiliter censebimus minorem altitudine NG) non aliter ten-
Fig. 10. di, quam si explicata essent in figuram rectangularem MO*mo* (Fig. 10.) appensumque haberent pondus P, quod sit æquale ponderi prismatis aquei, cujus tria latera sint 1°. radius tubuli, 2°. longitudo ejusdem & 3°. altitudo aquæ supra tubum; Ex hac propositione intelligitur nonsolum ratio tensionum, si diversæ fuerint altitudines aquæ aut diametri tuborum, sed & ipsa tensionum mensura: Quod si proin firmitas tuborum major sit ista tensione, nullum erit rupturæ periculum; si secus certo rumpetur tubus. Cæterum de firmitate tuborum experimenta instituta fuerunt à variis; sunt autem ejusmodi experimenta difficilia & sumtuosa; poterit igitur facilius firmitas tuborum sive plumbeorum sive ferreorum cognosci, si experimento innotescat, quantum pondus filum plumbeum aut ferreum datæ crassitiei sustinere possit sine rupturæ periculo. Experimentum simile à me institutum apponam in fine sectionis ostensurus quomodo inde firmitas tubi datæ crassitiei & diametri deduci possit.

Sequun-

Sequuntur Experimenta quæ ad Sectionem pertinent Secundam.

Ad §. 5.

De *tubulis capillaribus* : Experimenta innumera de horum tubulorum indole à variis sumta fuerunt, quos inter eminet Georgius Bernhardus Bulffingerus, qui non solum præcipua collegit, sed & plurima de suis addidit, vid. *Comm. Acad. sc. Petrop. tom. 2. pag. 233. & seqq.*

I. Ut oculis recte appareret, quam contrariæ sint Indolis hâc in parte mercurius & reliqua fluida, confici curavi vas vitreum A B C (Fig. 11.) ex duobus cruribus verticalibus compositum, quorum alterum A B diametrum habebat trium linearum vel quatuor, alterum B C vix tertiæ partis lineæ. Cum vas liquore quocunque implebatur, superficies altius erat in crure strictiore quàm ampliore, veluti in D & G, mercurius autem solus depressior est in strictiore quam ampliore, veluti in F & G. Fig. 11.

II. Ostensurus mercurium non aliam ob rationem à natura aliorum fluidorum recedere, quam ob fortiorem particularum suarum mutuam attractionem cogitavi de his experimentis : tubulum nempe gracilem mercurio suctione implevi eumque horizontaliter positum sensim erexi ; Sic effluxit mercurius, nunquam tamen omnis & altitudo verticalis mercurii in tubulo residui in omni situ sibi constabat. Quod si autem, cum mercurius in tubulo sic suspenditur, extremitas tubi mercurio in vase stagnanti admovetur, protinus omnis effluit. Priora Phœnomena, ni fallor, indicant mercurio & aliis fluidis idem contingere, cum vi attractrici nullus est locus ; mercurium autem fortissime se attrahere docet phœnomenon ultimum.

III. Sumatur tubus cylindricus vitreus diametri 3 aut 4 linearum, fundo instructus ex Charta subtili, aut tenuissima lamina ferrea parato & in medio minimo foraminulo perforato, ut ostendit (Figura 12.) Inclinetur tubus A C B D & impleatur totus mercurio, dein sensim erigatur ; fiet quod antea, & quamvis tubus sit amplissimus, non tamen effluet omnis mercurius, sed suspensa hærebit ejus pars, veluti M C D N, hæcque eo major erit, quo minus est ejus foraminulum o. Dein cum fundum submergitur Fig. 12.

 mertubus fuerit plumbeus, ſuſtinebit aquam ad altitudinem 18. ped. vi alterius obſervationis, poteritque altitudinem aquæ ferre 99. ped. ſi latera tubi habeant in craſſitie lineam integram. Convenit hoc cum eo quod Mariottus in *tract. de motu aquarum* p. 472. habet, ubi nempe dicit tubum plumbeum, cujus diameter unius erat pedis, & laterum craſſities duarum linearum cum dimidia ſine ruptura aquam tuliſſe ad altitudinem centum pedum, quod cum obſervaret abraſit ſenſim latera, donec tandem ad lineæ craſſitiem eſſent diminuta, & tum denique vim aquæ tubum disrupiſſe.

Ex obſervata fili ænei firmitate colligitur etiam firmitas tormentorum bellicorum: fuerit v. gr. tormentum bellicum cujus animæ diameter habeat tres poll. ſolent autem haud procul à lumine accenſorio, ubi maxima eſt vis pulveris, craſſities laterum eſſe præterpropter æquales diametro animæ, ita ut diameter tota ſit tripla diametri animæ. Quia igitur craſſities hæc non eſt negligenda præ diametro animæ, cenſebimus materiam omnem concentratam in medio atque ſic ab axe animæ diſtantem tribus pollicibus. Hoc poſito erit altitudo maxima aquæ quam tormentum haud procul à lumine accenſorio ferre poteſt $= \frac{11}{2} \times 12 \times 3 \times 2 \times 518 = 205128$, quæ vis fere ſepties millies ſuperat elaſticitatem aëris naturalis. Oſtendam autem in ſequentibus, pulverem pyrium accenſum vim exercere poſſe ad rumpendum tormentum aliquantum quidem majorem, quam quæ dicta fuit, ſed non multum tamen excedentem. Reliquum autem firmitatis, quod requirunt tormenta, habent à cingulis ſeu faſciis, quæ dicuntur *plattes bandes & moulures*, præter id quod in primo ortu tormenti (*à l'endroit de la culaſſe*) craſſities major ſit quam quæ à nobis aſſumta fuit. Interim non pauca tormenta diſrumpi, ſic non mirabimur.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO TERTIA.

De velocitatibus fluidorum ex vase utcunque formato per lumen qualecunque effluentium.

§. I.

PRiusquam motum aquarum à gravitate propria ortum definire tentemus, ruminabimur quod in Sectione prima §. §. 18. 19. 20. 21. & 22. à nobis allatum fuit de principiis ad hoc adhibendis.

Recordabimur nempe *ascensum potentialem* Systematis, cujus singulæ partes velocitate qualicunque moventur, significare altitudinem verticalem, ad quam centrum gravitatis illius Systematis pervenit, si singulæ particulæ motu sursum converso sua velocitate, quantum possunt, ascendere intelligantur, & *descensum actualem* denotare altitudinem verticalem, per quam centrum gravitatis descendit, postquam singulæ particulæ in quiete fuerant. Tum etiam memores erimus necessario *ascensum potentialem* æqualem esse *descensui actuali*, quando omnis motus in materia substrata hæret, nihilque de eo in materiam insensibilem aut aliam ad systema non pertinentem transit, & denique motum fluidorum talem proxime esse, ut ubique velocitas reciprocè sit proportionalis amplitudini vasis respondenti, quâ de re suo loco alia quædam interjiciemus. Nunc convenit examinare sequentem propositionem.

Problema.

§. 2. Si aqua per canalem utcunque formatum fluat, ejusque velocitas cognita sit aliquo in loco, invenire *ascensum potentialem* omnis aquæ in canali contentæ.

Solutio.

Solutio.

Sit canalis utcunque formatus *S T* (Fig. 13. & 14.) per quem aqua fluit Fig. 13. & 14.
b e f g; assumitur, si in axe *a e* accipiatur punctum quodcunque *n*, per quod planum ad axem perpendiculare *p m* transeat, fore, ut omnes particulæ aqueæ in illo plano existentes æquali velocitate fluant, & quidem tali, quæ sit ubique reciproce proportionalis magnitudini sectionis *p m*. Sit autem velocitas aquæ in *g f* talis, quæ debetur altitudini verticali *q s*, id est, sit *ascensus potentialis* strati aquei in *g f* æqualis lineæ *q s*, & quoniam hujusmodi altitudines sunt in ratione quadrata velocitatum, sequitur esse *ascensum potentialem* aquæ in *p m* æqualem quartæ proportionali ad quadratum amplitudinis *p m*, quadratum amplitudinis *g f* & altitudinem *q s*, nempe $= \frac{gf^2}{pm^2} \times qs$. His ita præmonitis ponemus in figura decima quarta esse curvam B P G, scalam amplitudinum canalis, ita ut posita A N $= a n$, denotet N P amplitudinem in *p m*: dein curvam H I K esse scalam *ascensuum potentialium*, ita ut sit $NI = \frac{EG^2}{NP^2} \times qs$. fingatur nunc elementa singula curvæ H I K habere pondus æquale ponderi strati aquei respondentis, & cadere centrum gravitatis istius curvæ in punctum L, & ducatur L O perpendicularis ad axem A E; sic erit L O *ascensus potentialis* totius aquæ quæsitus. Ex mechanicis autem constat, si fiat tertia curva U X Z, cujus applicata N X sit ubique æqualis $\frac{EG^2}{NP}$, fore L O æqualem quartæ proportionali ad spatium A E G B & A E Z U atque lineam *q s* vel E K. Patet igitur quæsitum. Q. E. I.

§. 3. Fuerit v. gr. canalis conicus, in quo superficies anterior *g f* & posterior *b e* diametros habeant ut *m* ad *n*, erit *ascensus potentialis* aquæ

$$= \frac{3m^3}{n(mm+mn+nn)} \times qs.$$

Problema.

§. 4. Datis variationibus infinite parvis tam ratione situs quam velocitatis, quæ superficiei aquæ anteriori respondent, invenire variationes ad *ascensus potentiales* totius aquæ pertinentes.

Solutio.

Solutio.

Sit ſpatium $AEGB = M$, ſpatium $AEZU = N$, $qs = v$, erit *aſcenſus potent.* $= \frac{Nv}{M}$: quia vero quantitas aquæ in canali conſtanter eadem ponitur, erit ſpatium $AEGB$ invariabile, adeoque $dM = o$ ita ut differentiale *aſcenſus potent.* ſit ſimpliciter $= \frac{Ndv + vdN}{M}$, habetur autem dN ex variatione ſitus aquæ. Patet igitur propoſitum. Q. E. I.

Scholion.

§. 5. Poterunt hæ propoſitiones inſervire pro motu fluidi intra vaſa moti, id eſt, non effluentis definiendo, uti ſuo loco oſtendam: at vero cum fluidum per foramen effluit, aptius inſtituetur aliter calculus, nempe ut ſequitur.

Problema.

§. 6. Invenire differentiam *aſcenſus potentialis* poſtquam guttula per foramen effluxit.

Solutio.

Fig. 15. Fingamus aquam effluere ex vaſe $aimb$ (Fig. 15.) utcunque formato, fundum ſit im perforatum foramine pl: quantitas aquæ, poſtquam jam data ejus quantitas effluxit, reſidua in vaſe ſit $cimd$; effluat autem tempuſculo infinitè parvo guttula $pnol$, ſuperficie cd deſcendente in ſitum ef: concipiatur in medio aquæ ſectio gh parallela ſuperficiebus cd vel ef ipſique fundo im; ſitque velocitas unius cujusvis particulæ in gh talis, ut poſſit aſcendere ad altitudinem qs ſeu v, cum nondum effluxit guttula & ad altitudinem qz ſive $v + dv$, poſtquam ea ipſa guttula effluxit. Omnibus his ita poſitis, quæritur incrementum *aſcenſus potentialis* aquæ poſtquam ſitum $cimd$ commutavit cum ſitu $eipnolmf$, id eſt, poſtquam guttula emanavit.

Fig. 16. Fiat, ut antea, curva CGI (Fig. 16.) ceu ſcala amplitudinum, ubi adeoque CD vel EF repræſentabunt magnitudinem ſuperficiei aqueæ ante vel

vel poſt effluxum guttulæ, GH amplitudinem illam aſſumtam, IL magnitudinem fundi, PL magnitudinem foraminis, dum adhærens parallelogrammum minimum PNOL reſpondet guttulæ cylindricæ *pnol*: dein conſtruatur alia curva TRU, cujus applicatæ ſint rurſus æquales quadrato lineæ GH, diviſo per applicatam reſpondentem curvæ CGI, cui curvæ eadem conditione annexum eſt parallelogrammulum LOYX, cujus nempe latus LX eſt æquale quadrato lineæ GH diviſo per lineam PL.

Jam igitur apparet *aſcenſum potent.* aquæ ante effluxum guttulæ eſſe = quartæ proportionali ad ſpatium DCIPL, ſpatium DTUL & altitudinem *qs*, eundemque poſt effluxum guttulæ eſſe = quartæ proportionali ad ſpat. FEIPNOL, ſpat. FWUXYOL & altit. *qz*: ſunt autem in utraque analogia termini primi (nempe ſpat. DCIPL & ſpat. FEIPNOL) inter ſe æquales, igitur ſi quodvis horum ſpatiorum indicetur per M, ſpatium DTUL per N, ſpat FWUXYOL per $N + dN$, altitudo *qs* per v & *qz* per $v + dv$, erit incrementum *aſcenſus potentialis* durante guttulæ effluxu $= \frac{N dv + v dN}{M}$. Quod ſi nunc ponatur $LD = x$, $FD = -dx$, $DC = y$, $HG = m$, $PL = n$, erit $DT = \frac{mm}{y}$, $LX = \frac{mm}{n}$, $LO = \frac{-y dx}{n}$ (quia ſpatium DFEC = ſpatio LONP), hincque $dN = LOYX - DFWT = -\frac{mmy dx}{nn} + \frac{mm dx}{y}$, unde nunc incrementum quæſitum *aſcenſus potentialis* eſt $= \left(N dv - \frac{mmvy dx}{nn} + \frac{mmv dx}{y}\right) : M$. Q. E. I.

Problema.

§. 7. Retentis iisdem poſitionibus invenire *deſcenſum actualem* infinitè parvum aquæ, dum guttula effluit.

Solutio.

Cum in Figura decima quinta aqua ſitum *cdmi* mutat cum ſitu *efml onpi*, patet in utroque ſitu centrum gravitatis partis aquæ *efmi* in eodem loco eſſe, poſſeque proin concipi ſolam particulam *cdfe*, (quæ eſt $= -y dx$ dum tota aquæ maſſa eſt = M) deſcendiſſe in *lonp*. Sit jam altitudo particulæ

ticulæ aqueæ *cdfe* ſupra guttulam *lonp* $= x$, altitudo centri gravitatis aquæ *efmi* a fundo $= b$, erit altitudo centri gravitatis omnis aquæ in ſitu *cdmi* ſupra fundum $= b - \frac{y\,dx}{M} \times (x - b)$ & in ſitu *efmlonpi* erit eadem altitudo $= \left(\frac{M + y\,dx}{M}\right) \times b$; unde differentia altitudinum ſeu *deſcenſus actualis* quæſitus $= -\frac{y\,dx}{M} \times x$, quæ æquatio indicat, guttulam quæ effluxerit multiplicandam eſſe per altitudinem aquæ ſupra foramen, productumque dividendum per quantitatem aquæ, ut habeatur *deſcenſus actualis*, qui fit dum guttula effluit, Q. E. I.

Problema.

§. 8. Determinare motum fluidi homogenei ex vaſe dato per foramen datum effluentis.

Solutio.

Quoniam per hypotheſin noſtram *aſcenſus potentialis* ſingulis momentis æqualis eſt *Deſcenſui actuali*, erit incrementum prioris dum guttula effluit æquale incremento poſterioris, quod ſimili tempuſculo oritur. Igitur ſi rurſus ſuperficies aquæ, poſtquam data ejus quantitas effluxit, ponatur $= y$, amplitudo vaſis quocunque in loco ad libitum aſſumta $= m$, amplitudo foraminis $= n$, altitudo aquæ ſupra foramen $= x$; ſi præterea quantitas N ea lege conſtruatur, quæ §. 6. indicata fuit, atque per v intelligatur altitudo debita velocitati aquæ in loco aſſumto, ubi nempe amplitudo vaſis eſt $= m$, erit per §. 6. incrementum *aſcenſus potentialis* $= \left(N\,dv - \frac{mmvy\,dx}{nn} + \frac{mmv\,dx}{y}\right) : M$, minimusque *deſcenſus actualis* $= \frac{-yx\,dx}{M}$ (per præced. §.); unde habetur $\left(N\,dv - \frac{mmvy\,dx}{nn} + \frac{mmv\,dx}{y}\right) : M = -yx\,dx : M$ ſeu $N\,dv - \frac{mmvy\,dx}{nn} + \frac{mmv\,dx}{y} = -yx\,dx$, quæ æquatio generaliter integrari poteſt, quandoquidem litteræ N & y ſunt functiones datæ ipſius x & litera v unius tantum dimenſionis eſt.

Corollarium I.

§. 9. Quum velocitates ſint in ratione reciproca amplitudinum, patet

patet fore altitudinem, quæ velocitati aquæ effluentis respondet $= \frac{mm}{nn} v$, quæ proin, si vocetur z, erit $nnNdz - mmzydx + \frac{mmnnzdx}{y} = mmyxdx$.

Corollarium 2.

§. 10. Si foramen sit valde parvum, ratione amplitudinum vasis, fit $n = o$, totaque æquatio abit in hanc $- mmzydx = - mmyxdx$ vel $z = x$; tunc igitur aqua ea constanter effluit velocitate, qua ad altitudinem supremæ superficiei usque ascendere possit, quem solum casum Geometræ hactenus fuerunt recte assecuti: valetque hæc propositio pro omnibus vasis utcunque formatis: at cum foramen non ut infinite parvum consideratur, nequaquam negligenda est vasis figura. Notari tamen potest, quod nisi foramen sit amplissimum, sine notabili admodum errore idem ut infinitè parvum considerari possit.

Corollarium 3.

§. 11. Cum fluidum non est ubique idem, simili modo instituendus est calculus, inquirendo nimirum tum in incrementum *ascensus potentialis* fluidi compositi, tum in *Descensum actualem*, eaque inter se æquando. Quod si autem foramen sit valde parvum, per se patet, quod etiam calculus ostendit, fore ut fluidum velocitate exiliat altitudini debita tali, ut si vas ad eandem altitudinem liquore eodem, qui exilit, repletum sit, eandem pressionem latera foraminis sustineant.

Scholium Generale.

§. 12. Priusquam Corollaria specialiora ex theoria nostra deducamus circa motum fluidorum ex vasis cylindricis, conveniet hic examinare, quousque hypotheses assumtæ cum rei natura conspirent & quænam aliæ intervenire possint causæ, quarum in computo nullam rationem habuimus, motum fluidum diminuentes.

Quod primo attinet ad Principium *conservationis virium vivarum* seu *perpetuæ æqualitatis inter ascensum potentialem descensumque actualem* nihil hic video, quod ei notabili impedimento esse possit, si modo à frictionibus, tenacitate, aëris resistentia hujuscemodique aliis obstaculis mentem abstrahamus.

hamus. Sæpe quidem fit, ut principium illud non ſine limitatione adhiberi poſſit, quod in ſequentibus oſtendemus, nempe cum particulæ aquæ motu ſingulæ diverſo feruntur, quo fit ut ſingulis momentis aliquid de motu, vel ſi mavis de *aſcenſu potentiali*, perdatur. Sed in præſenti caſu nihil ſimile accidit, quandoquidem omnes particulæ ſimiliter fere moventur & præſertim, quando foramen eſt valde parvum, motus particularum internarum fere nullus eſt, nihilque adeo inde detrimenti venire poteſt. Alterum autem principium, quo aſſumitur velocitatem cujuslibet particulæ eam eſſe, quæ reſpondet inverſæ rationi amplitudinum, duplici quidem laborat incommodo, *primo* nempe, quod motus circa latera vaſis tardior paulo ſit quam in medio nec proin omnes particulæ eidem amplitudini vaſis reſpondentes, æquali velocitate ferantur, & *ſecundo*, quod aqua à fundo non admodum remota motum, quem principium hoc poſtulat, habere non poſſit: Utrumque autem nullum ſenſibilem errorem poſt ſe trahit, quando in hoc problemate ſimplici figura vaſis interna nihil fere ad motum aquæ effluentis attineat; Ex eadem ratione intelligitur non multum diverſum eſſe poſſe motum aquæ ſub alia quacunque directione effluentis, quia ſcilicet motus aquæ internus in ima vaſis parte tantum diverſus fit, hæcque diverſitas nullius momenti fere eſſe poteſt. Apparet ergo hypotheſes, quibus calculus noſtri hujus Problematis innititur, ita convenire cum natura quæſtionis, ut error inde nullus ſenſibus perceptibilis oriri poſſit. At vero impedimenta ſupra memorata, attritus, tenacitas fluidi aliaque ſimilia majoris efficaciæ ſunt, præſertim cum foramen, per quod fluida exiliunt, per quam exiguum, aut altitudo aquæ ſupra foramen admodum magna, aut denique tubus valde gracilis eſt, qua de re experimenta plurima extant apud Mariottum in *tract. de mot. aquarum.* Jam vero progredior ad examinandum motum aquarum ex vaſis Cylindricis per foramina cujuscunque magnitudinis effluentium. Vaſa autem compendii & elegantioris ſolutionis cauſa conſiderabimus verticaliter poſita.

De

De his quæ pertinent ad effluxum aquarum ex Cylindris verticaliter positis, per Lumen quodcunque, quod est in fundo horizontali.

§. 13.

GEometræ, quibus de aquis ex vase erumpentibus sermo fuit, considerare potissimum solent cylindros verticaliter positos: Igitur haud abs re erit ex theoria nostra generali consectaria illa, quæ huc pertinent, deducere. Sit amplitudo cylindri ad amplitudinem foraminis ut m ad n; altitudo aquæ supra foramen, cum fluxus incipit $= a$; altitudo aquæ residuæ $= x$, altitudo velocitati aquæ internæ debita $= v$; erit in æquatione canonica paragraphi octavi $y = m$, $N = mx$ (per §. 6.) quæ adeoque abit in hanc æquationem.

$$mxdv - \frac{m^3}{nn}vdx + mvdx = -mxdx, \text{ vel}$$

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)vdx + xdv = -xdx$$

multiplicetur hæc posterior æquatio per $x^{-\frac{mm}{nn}}$, ut habeatur

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)x^{-\frac{mm}{nn}}vdx + x^{1-\frac{mm}{nn}}dv = -x^{1-\frac{mm}{nn}}dx.$$

Potest jam hæc æquatio integrari: observanda autem est in Integratione constantis additio, talis nempe, ut a fluxus initio, id est, cum $x = a$, sit velocitas fluidi nulla, ipsaque proin v pariter $= o$: ita vero oritur:

$$x^{1-\frac{mm}{nn}}v = \frac{nn}{2nn - mm}\left(a^{2-\frac{mm}{nn}} - x^{2-\frac{mm}{nn}}\right) \text{ vel}$$

$$v = \frac{nna}{2nn - mm}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{mm}{nn}} - \frac{x}{a}\right)$$

§. 14. Ex hâc igitur æquatione cognoscitur altitudo generans velocitatem aquæ internæ; ubi notari meretur, si vas sit amplissimum, mox posse censeri $v = \frac{nn}{mm}x$, postquam scilicet vel tantillum descendit aqua, id est, ſtatim ac x paulo minor eſt quam a. Regula hæc fallit notabiliter tantum circa primum motus initium & ſi primum iſtud motus elementum conſideratur (quo nempe altitudo $a - x$ ut infinite parva cenſeri poteſt) indicat æquatio, eſſe tunc $v = a - x$. Unde ſequitur, in omni cylindro, quodcunque fuerit foramen, aquam internam inſtar corporum libere cadentium accelerari ab initio motus. Si vero motus aliquantulum continuet, eo minus fallet hæc Regula, quo majus fuerit foramen, & quo altior eſt aqua in tubo; ſi porro deſideretur altitudo ea, quæ velocitati aquæ effluentis reſpondeat, quam §. 9. poſuimus $= z$, erit $z = \frac{mm}{nn} v$, ſeu

$$z = \frac{mma}{2nn - mm} \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1 - \frac{mm}{nn}} - \frac{x}{a} \right)$$

§. 15. Cum n eſt $= m$, id eſt, cum nullum eſt fundum, apparet ex ipſa rei natura, aquam inſtar corporum gravium libere cadere atque accelerari, id ipſum autem indicat etiam æquatio; fit enim in hâc poſitione $z = a - x$. Si vero foramen eſt veluti infinite parvum ratione amplitudinis vaſis, quem caſum jam ſupra conſideravimus, ponendum eſt $n = o$, & tunc fit $z = x$, quod indicat, aquam ea conſtantur effluere velocitate, qua ad totam aquæ altitudinem aſcendere poſſit. Denique cum $mm = 2nn$, prodit $z = \frac{mm}{o}(x - x)$, ex quo valore cum nihil cognoſci poſſit, deſcendendum eſt ad æquationem differentialem §. 13. quæ nunc hæc eſt:

$$-v\,dx + x\,dv = -x\,dx, \text{ vel } \frac{x\,dv - v\,dx}{xx} = -\frac{dx}{x},$$

quæ integrata cum debitæ conſtantis additione dat $\frac{v}{x} = \log. \frac{a}{x}$, vel $v = x \log. \frac{a}{x}$, aut $z = 2v = 2x \log. \frac{a}{x}$.

§. 16. Velocitas aquæ effluentis ab initio creſcit poſteaque decreſcit, eſtque alicubi maxima, nempe eo in loco, quo aqua deſcendit ad altitudinem $a : \left(\frac{mm - nn}{nn}\right)^{nn : (mm - 2nn)}$; id quoque experientia edoctus indicavit Mariottus in *tract. de motu aquarum part.* 3. *diſc.* 3. *exp.* 5, ipſaque velocitas maxima talis eſt, quæ debetur altitudini

$$\frac{mma}{mm - 2nn}$$

$$\frac{mma}{mm-2nn} \times \left[\left(\frac{nn}{mm-nn}\right)^{nn:(mm-2nn)} - \left(\frac{nn}{mm-nn}\right)^{(mm-nn):(mm-2nn)}\right]$$

quæ quantitas reducta fit $=$

$$\frac{mma}{mm-nn}\left(\frac{nn}{mm-nn}\right)^{nn:(mm-2nn)}$$

Intelligitur ex iſtis formulis tempus, quo velocitas à nihilo in maximam vertitur, plane imperceptibile eſſe, quando foramen vel mediocriter parvum tubusque non admodum longus eſt: notabile autem fieri, cum res ſecus ſe habet, quod videmus in fontibus ſalientibus, ad quos aquæ per longos tractus vehuntur; hæc vero quæ ad tempora pertinent, magis in ſequenti ſectione explicabuntur, atque ſimul oſtendetur, quam parum aquæ ex vaſis ampliſſimis ejiciatur, priusquam maxima velocitate effluant.

Natura velocitatum melius intelligitur ex appoſita Figura decima ſeptima, in quâ ſi A B repræſentet totam altitudinem fluidi ſupra foramen ab initio fluxus, exprimunt curvæ A 1 C B, A 2 C B, A 3 C B, A 4 C B, ſcalas altitudinum reſpondentium, ad quas fluidum effluens ſua velocitate aſcendere poſſit in diverſis foraminum magnitudinibus: nempe ſcala accedet ad figuram A 1 C B, ſi foramen habeat exiguam rationem ad vaſis amplitudinem & ad figuram A 2 C B, cum aſſumitur fundum majori lumine perforatum; & ſi jam ratio foraminis ſit ad amplitudinem vaſis ut 1 ad $\sqrt{2}$, erit ſcala illa ut A 3 C B (quo in caſu minor fit maxima velocítas quam in quocunque alio, eſtque nominatim ea quæ debetur altitudini $\frac{2a}{c}$, intelligendo per c numerum cujus Logarithmus eſt unitas, id eſt, altitudini paulo minori quam $\frac{3}{4}a$) ac denique erit ſcala ut A 4 C B cum fere nihil fundi ſupereſt. Fig. 17.

§. 17. Jam vero exemplo quodam illuſtrabimus, quod ſupra §. 10. indicatum fuit, nempe niſi foramen ſit ampliſſimum, poſſe id ſine valde ſenſibili errore in calculo conſiderari ut infinitè parvum, atque adeo aſſumi $z = x$, ut §. §. 10. & 15. dictum fuit. Videtur id tantum apud nonnullos Auctores valuiſſe, ut cenſuerint, nullam magnitudinis in foramine rationem unquam eſſe habendam, quantumvis magnum ponatur foramen, quæ res certe ridicula eſt: ſaltem nemo hactenus quod ſciam magnitudinem foraminis pro hoc negotio recte conſideravit. Ponamus igitur cylindrum, cujus diameter quadrupla tantum ſit diametri foraminis, cujusmodi magna foramina

mina in inſtrumentis hydraulicis raro occurrere ſolent, & fingamus ſuperficiem aquæ per centeſimam partem deſcendiſſe tantum totius altitudinis initialis (deſcendiſſe autem aliquantulum aſſumo, quia à primo initio motus aquæ nullus ineſſe poteſt, nedum tantus, ut aqua effluens ad totam altitudinem aſcendere motu ſuo poſſit) hæ poſitiones faciunt $m = 16n$ & $mm = 256nn$, atque $x = \frac{99}{100}a$, unde prodit

$$z = \frac{128}{127}\left(\frac{99}{100} - \left(\frac{99}{100}\right)^{255}\right)a = \frac{92}{100}a,$$

quæ quidem aliquantulum differt à quantitate x, ſeu $\frac{99}{100}a$, ſed tamen non multum admodum, fitque differentia multo minor, cum minus eſt foramen, & paullo magis deſcendit ſuperficies aquæ. Igitur differt hæc Theoria à vulgari potiſſimum circa fluxus initium, quo minor eſt motus, quam ſtatutum fuit: è contrario circa fluxus finem majori velocitate aqua ejicitur, quam ſecundum principia ſolita deberet.

§. 18. Hactenus conſideravimus motum aquæ à propria ſua gravitate ortum; ponamus nunc vi aliena aquam ejectam fuiſſe præter vim gravitatis, talemque aquæ effluenti communicatam fuiſſe velocitatem, qua ad altitudinem multo majorem aſcendere poſſit, quam ſi ſola aquæ gravitas motum produxiſſet; dein ſubito vim illam alienam evaneſcere, & aquam ſibi relinqui; Id autem ſi fiat, experientia docet citiſſime aquæ velocitatem decreſcere & mox talem eſſe, ut notabililer non ſuperet velocitatem eam, quæ ex ſola aquæ gravitate oritura fuiſſet. Ita videmus fieri aliquando in fontibus ſalientibus (de cujus rei cauſa vera atque menſura alibi dicam) ut aquæ ad triplam vel quadruplam majoremve altitudinem aſſiliat, quam eſt ordinaria; quod cum ita contingit, ſaltus iſte protinus ceſſat ſolitamque altitudinem, quantum id ſenſibus percipi poteſt, non excedit: loquor autem de tubis foraminibus non valde magnis perforatis; nam cum foramen eſt aliquanto majus, non ita cito decreſcit aquæ ſaltus. Jam itaque examinabimus, quouſque theoria cum iſtis phænomenis conveniat, accuratasque menſuras eorum, quales inde ſequuntur, ſubjungemus. Ut vero rem generaliter proſequamur, ponemus rurſus amplitudinem cylindri ad amplitudinem foraminis ut m ad n: aquam ea explodi velocitate qua aſſurgere poſſit ad altitudinem a, eoque ipſo temporis puncto altitudinem aquæ ſupra foramen eſſe

esse $= a$, cujus sola gravitas nunc aquam expellat; deinde descendere superficiem aquæ in Cylindro per altitudinem verticalem $a - x$, ita ut altitudo residua sit $= x$ & tunc velocitatem aquæ ejectæ talem esse, quæ debeatur altitudini z. His ita positis utemur æquatione generali differentiali §. 9. quæ hæc est $nnNdz - mmzydx + \frac{mmnnzdx}{y} = -mmyxdx$ (ubi rursus, ut §. 13. indicatum fuit, est $y = n$ & $N = mx$) quæque in casu nostro particulari talis fit

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) zdx + xdz = -\frac{mm}{nn} xdx,$$

quæ multiplicata $x^{-\frac{mm}{nn}}$ posteaque sic integrata, ut posita $x = a$, fiat $z = \alpha$ dabit æquationem desideratam finalem

$$z = \left(\frac{mm}{2nn - mm} + \frac{\alpha}{a}\right) a^{\frac{2nn - mm}{nn}} \times x^{\frac{mm - nn}{nn}} - \frac{mm}{2nn - mm} x$$

$$\text{vel } z = \frac{mma}{2nn - mm}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1 - \frac{mm}{nn}} - \frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm - nn}{nn}} \alpha$$

quæ altitudo si comparetur cum illa, quæ paragrapho 14. indicata fuit, invenitur excessus unius super alteram $= \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm - nn}{nn}} \alpha$; unde jam omnia ea confirmantur Phænomena, quæ modo indicata fuerunt; excessus enim iste, cum m numerus est multo major quam n, insensibilis statim fit, postquam aqua vel tantillum descendit, id est, post brevissimum temporis spatium, nunquam tamen omnis evanescit, quam diu durat fluxus, & denique eo notabilior continue est, quo magis ratio numeri m ad n ad æqualitatem accedit. Fuerit v. gr. diameter tubi decies major diametro foraminis, expellaturque aqua vi tali, ut velocitate sua assilire possit ad altitudinem quæ sit quadrupla altitudinis a seu aquæ supra foramen, quæritur ad quam altitudinem sua velocitate aqua effluens ascendere poterit, postquam per millesimam partem ipsius a superficies aquea descenderit in tubo, si interea aqua sola propria gravitate ad effluxum solicitetur, dein quænam similis altitudo futura fuisset, si aqua nullum motum ab initio habuisset: est autem $m = 100n$, $mm = 10000nn$, $x = \frac{999}{1000}a$, $\alpha = 4a$, unde in priori casu fit

$z =$

$$z = \left[\frac{10000}{9998} \left(\frac{999}{1000} - \left(\frac{999}{1000} \right)^{9999} \right) + 4 \left(\frac{999}{1000} \right)^{9999} \right] a,$$

five $z = \frac{99915}{100000} a + \frac{18}{100000} a$, in pofteriori cafu autem fit $z = \frac{99915}{100000} a$; ex quo exemplo patet, quam exiguus & plane infenfibilis fit exceffus prioris altitudinis fupra alteram, & quam cito diminuatur jactus ille aqueus, quandoquidem tota mutatio fiat, dum fuperficies aquæ per millefimem partem altitudinis a defcendit, quod tempus in machinis hydraulicis folitis non poteft non effe admodum breve. Tum etiam confirmatur, quod fupra Paragrapho 17. dictum fuit, effe fcilicet proxime $z = x$, quando foramen eft vel mediocriter parvum, cum in præfenti cafu, ubi motus à quiete incipit, differentia inter z & x fit tantum quindecim centies millefimarum partium ipfius altitudinis a; quoniam interim paululum major eft altitudo z quam x, patet ad majorem altitudinem afcendere poffe aquam effluentem, poftquam aliquantifper effluxit aqua, quam eft altitudo aquæ fupra foramen.

§. 19. Poftquam fic ex Theoria noftra generali deduximus, quæ motum fluidorum ex cylindris verticaliter pofitis fpectant, jam etiam confiderabimus tubos oblique pofitos, qui prælongi effe folent in fontibus falientibus. In his enim id fingulare eft, quod acceleratio motus non ita repente fiat, veluti cum Cylindri funt verticales atque fic liceat fenfibus percipere confenfum Theoriæ, cum motu aquarum reali.

§. 20. Fingamus canalem utcunque incurvum, fed tamen Cylindricum, cujus amplitudo habeat rurfus ad amplitudinem foraminis rationem m ad n. Incipiat motus à quiete, fitque altitudo verticalis aquæ fupra foramen ab initio motus $= a$; Effluxerit certa aquæ quantitas, ponaturque altitudo verticalis aquæ refiduæ fupra foramen $= x$, longitudo canalis, quæ eo ipfo momento plena eft $= \xi$, habeatque tunc aqua interna (cujus fingulas particulas motu axi canalis parallelo feri hîc affumo) velocitatem, quæ refpondeat altitudini v; His ita pofitis, fi fimili ratiocinio utamur quo fupra, quærendo nimirum incrementum *afcenfus potentialis* dum guttula effluit, uti paragrapho 6. fecimus, idemque ponendo $=$ *defcenfui actuali*, obtinetur nunc talis æquatio

$$\xi dv - \frac{mm}{nn} v d\xi + v d\xi = - x d\xi, \text{ five}$$

$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)$

$$\left(1-\frac{mm}{nn}\right) v\,d\xi + \xi\,dv = -x\,d\xi$$

cujus integralis, quod patet multiplicatis terminis per $\xi - \frac{mm}{nn}$ hæc eſt

$$v = \xi^{\frac{mm}{nn}-1} \int -x\,\xi^{-\frac{mm}{nn}}\, d\xi.$$

Fuerit v. gr. canalis rectus & ita inclinatus verſus horizontem, ut ſinus anguli intercepti inter utrumque ſit ad ſinum totum ut 1 ad g, erit $\xi = gx$; unde

$$v = \frac{nna}{2nn - mm}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{nn-mm}{nn}} - \frac{x}{a}\right)$$

quæ æquatio cum non differat ab æquatione §. 13. pro Cylindris verticalibus data, ſequitur in utroque caſu velocitates aquæ easdem eſſe, poſtquam deſcenſus verticales ſuperficiei aquæ iidem ſunt: Igitur accelerationes in locis homologis utrobique ſimiles ſunt ratione altitudinum verticalium, & hoc tantum diſcriminis intercedit, quod in canali inclinato lentius fiant, idque in ratione ut 1 ad g: facile igitur ſenſibus percipi poterunt hæ accelerationes in canalibus valde inclinatis, quæ in verticalibus ob nimiam mutationum celeritatem non poſſunt. Cœterum patet per ſe ex eo, quod frictiones à longitudine tubi augeantur, non poſſe non velocitates inde diminui, ad quod animum advertent ii, quibus experimenta hâc de re inſtituere animus erit.

De Effluxu Aquarum ex Cylindris verticaliter positis, qui in alios tubos strictiores pariter verticales desinunt.

§. 21.

Constat experientia, inter duos Cylindros omnino æquales similiterque positos, quorum alterius foramini tubus strictior respondeat, hunc citius depleri, qui tubum appensum habet, & quidem eo citius, quo magis tubus à loco insertionis versus extremitatem amplitudine crescit, quæ pluribus exposuit D. s'Gravesande in *Phys. Elem. Math.* lib. 2. cap. 8. Totam rem sequenti Problemate comprehendemus.

Problema.

Fig. 18. §. 22. Fuerit vas cylindricum A E H B (Fig. 18.) verticaliter positum perforatum in F G, quo lumine communicet cum tubo conico F M N G, per cujus demum orificium M N aquæ effluant. Quæritur velocitas superficiei aqueæ C D, postquam à quiete descendit per A C vel B D.

Solutio.

Sit altitudo aquæ supra M N initialis, nempe $NG + HB = a$, altitudo superficiei aqueæ in situ C D supra M N, id est, $NG + HD = x$; longitudo tubi annexi seu $NG = b$; amplitudo orificii $MN = n$; amplitudo orificii $FG = g$, amplitudo Cylindri superioris $= m$; sit velocitas superficiei aqueæ in C D talis quæ debeatur altitudini v, erit in æquatione generali §. 8. $y = m$ & $N = m\ (x - b) + \frac{bmm}{\sqrt{gn}}$, quæ substitutiones instituto calculo conformes esse patebunt cum §. 6. reliquæ autem positiones eædem sunt quæ ante. Abit igitur æquatio paragraphi 8 in hanc

$$m(x-b)dv + \frac{bmm}{\sqrt{gn}}\,dv - \frac{m^3vdx}{nn} + mvdx = -mxdx$$

quæ porro divisa per m factoque $x - b + \frac{mb}{\sqrt{gn}} = z$, dat

$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)$

$$\left(1-\frac{mm}{nn}\right) v dz + z dv = -z dz - b dz + \frac{m b dz}{\sqrt{gn}}$$

quæ multiplicata per $z^{\frac{-mm}{nn}}$ facit

$$\left(1-\frac{mm}{nn}\right) z^{-\frac{mm}{nn}} v dz + z^{1-\frac{mm}{nn}} dv = -z^{1-\frac{mm}{nn}} dz - b z^{-\frac{mm}{nn}} dz + \frac{m b z^{-\frac{mm}{nn}} dz}{\sqrt{gn}}$$

poſt cujus integrationem addita conſtante C oritur

$$z^{\frac{nn-mm}{nn}} v = C - \frac{nn}{2nn-mm} z^{\frac{2nn-mm}{nn}} - \frac{nnb}{nn-mm} z^{\frac{nn-mm}{nn}} + \frac{mnnb}{(nn-mm)\sqrt{gn}} z^{\frac{nn-mm}{nn}}$$

in quo valor quantitatis conſtantis C ex eo definitur quod ab initio fluxus (cum nempe $x = a$ ſive $z = a - b + \frac{mb}{\sqrt{gn}}$) ſit $v = 0$ quia non poteſt motus oriri in inſtanti temporis puncto; hinc igitur fit C =

$$\left[\left(a-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}\right) \times \frac{nn}{2nn-mm} + \frac{nnb\sqrt{gn}-mnnb}{(nn-mm)\sqrt{gn}}\right] \times \left(a-b+\frac{mb}{\sqrt{gn}}\right)^{\frac{nn-mm}{nn}}$$

Ex his quidem æquationibus definiuntur omnia; quia verò calculus fit paullo prolixior, niſi amplitudo vaſis ſuperioris indicata per m tanta ſit, ut poſſit ratione amplitudinum g & n infinita cenſeri, hunc ſolum conſiderabimus caſum, idque eo magis quod error notabilis inde non oriatur, etſi mediocris ſit magnitudinis numerus $\frac{m}{n}$ aut $\frac{m}{g}$

§. 23. Quod ſi proinde ponamus $m = \infty$, ſimulque utamur primâ æquatione differentiali proximi paragraphi, atque in hâc ponatur $v = \frac{nn}{mm} s$, ut ſic inveniatur ex valore litteræ s altitudo ad quam aqua per orificium MN effluens ſuâ velocitate aſcendere poſſit, erit primo

$$\frac{nn}{m}(x-b) ds + \frac{bnn}{\sqrt{gn}} ds - m s dx + \frac{nn}{m} s dx = -m x dx$$

& quia $m = \infty$ atque facile prævidetur rationem fore finitam inter s & x, atque inter ds & dx, hæc eadem æquatio mutabitur rejectis terminis rejiciendis rurſus in hanc $-m s dx = -m x dx$ vel $s = x$, quod pariter paragr. 10.

 jam

jam fuit demonſtratam. E re vero duxi id de novo hic demonſtrare, quia caſus præſens diverſus videri poterat ab illo, de quo in præfato paragrapho dicitur. His intellectis non opus eſt pluribus explicare Phænomena circa hanc rem §. 21. Auctore s'Graveſande indicata; patet enim, aquam non aliter effluere per vas compoſitum A E F M N G H B, quam per vas ſimplex A O M N P B, cum nempe orificium M N eſt valde parvum, atque hinc majorem eſſe velocitatem ſuperficiei aqueæ C D, quam ſi per vas A E F G H B aquæ effluerent, poſito orificio M N = F G, multoque magis ſi M N fuerit majus quam F G, quod fit cum tubus verſus inferiora amplitudine creſcit: attamen obſervari debet, ab initio motus aquam tardius deſcendere, quam ſic definitum fuit, nec regulam iſtam prius locum habere quam ſuperficies C D per ſpatiolum aliquod deſcenderit, quod tamen brevi fit tempore: mutationes, quæ ab initio motus fiunt, in hoc caſu, examinabimus in ſectione ſequente.

§. 24. Eodem modo computus eſſet inſtituendus, ſi vaſi, quod ſemper nunc amplitudinis infinitæ ponimus, implantatus eſſet tubulus non verticalis ſed horizontalis, veluti in fig. 19. aut ſub alia directione qualicunque, ſemper autem reperietur aquas per orificium M N mox, poſtquam ſuperficies aquæ in vaſe principali aliquantulum deſcendit, ea proxime effluere velocitate, quæ reſpondeat altitudini iſtius ſuperficiei ſupra orificium; Inde liquet quod manentibus tam altitudine aquæ ſupra tubulum G N, quam ipſo orificio F G, augeatur quantitas aquæ dato tempore effluens ab aucta amplitudine orificii M N: Sic igitur demonſtratum hic dedimus, quod dictum fuit in fine §. 5, *Sect.* 1. Frontinum experientia fuiſſe edoctum, nempe, *plus debito aqua erogari per calicem legitima tum menſura tum poſitionis, cui ſtatim fiſtula amplioris moduli ſubjecta ſint.* Et quidem quantitates aquæ cæteris paribus erogari deberent ipſis orificiis M N proxime proportionales, niſi multa eſſent impedimenta; quæ hanc quantitatem valde diminuant, de quibus proxime dicam: facere poſſunt hæc impedimenta; ut admodum parum fluxus aquarum promoveatur ab aucto orificio extremo; ſemper tamen promovebitur aliquantum.

Fig. 19.

§. 25. Ex præmiſſis liquet velocitatem, qua ſuperficies aquæ C D in utroque, de quo diximus, caſu deſcendit cæteris paribus pendere ab amplitudine orificiorum M N; Hæc autem ea innituntur hypotheſi, quod aqua lateribus tubulorum G N ubique adhæreat & pleno orificio M N effluat, quæ hypo-

hypothesis locum amplius habere non posset, si nimium orificium istud augeretur. Dein patet quoque, cum aquæ per tubum verticalem in fig. 18. effluunt, earum fluxum accelerari à longitudine hujus tubi auctá: posset tamen hæc quoque ita augeri, ut tandem aquæ desinant esse continuæ in tubo, quin potius in columnas dividantur, quod fiet, si tubus longitudinem habeat plus quam trigintaduorum pedum aut minorem etiam, si simul amplitudine crescat versus MN; ita si orificium MN duplum sit orificii alterius FG, non poterit longitudo major esse quam octo pedum, sine periculo subsecuturæ aquarum separationis in suprema tubi parte, quam rem alibi demonstrabo: sed est alia insuper causa præter nimiam tubi longitudinem, quæ aquæ separationem producere potest, nempe quod altitudo aquæ CEHD minor sit, quam ut sat cito in tubum irrumpere possit, quo fit, ut aër una cum aqua simul superne influat, dum superficies aquæ formam cataractæ seu infundibuli cavi assumit, sic ut non totum orificium FG aqua obtegatur; Hæc quidem res facit, ut aqua minori copia effluat, non autem ut minori velocitate, quod posterius putavit Auctor quidam Italus, nomine Carolus Fontana, qui hâc de re Linguâ sua vernacula ita scripsit: *mâ se non vi fosse*, inquit, *tant' acqua, che bastasse à mantenere piena detta canna, l'acqua attraherà l'aria dentro di se in tanta quantità, quanto gli mancherá l'acqua intermettendosi fra l'acqua dà ogni banda; mà la velocità dell' acqua mancherá tanto, quanto sará l'altezza di tutta l'aria raccolta insieme che sarà in essa canna.* Rationem ejus, quod dixi, non inde velocitatem aquæ diminui posse, quilibet perspicit ex eo, quod alias non posset *ascensus potentialis* esse æqualis *descensui actuali* poteritque res facili experimento confirmari, incurvata tubi extremitate MN, ut aquæ horizontaliter effluant, & ex amplitudine jactus velocitas aquæ dignosci possit. Quomodo autem pro lubitu fieri possit, ut nullis mutatis aliis circumstantiis aër aquis circa summitatem tubi misceatur, sic habe: fiat nempe parvulum foramen in tubo haud procul ab orificio FG (Fig. 18. & 19.) quod si autem durante aquæ fluxu digito obturaveris istud foraminulum, aquæ transfluent puræ, & si removeris digitum, mox aër per foraminulum idem irrumpet seque cum aqua præterfluente miscebit. His intellectis facile erit rationem reddere Phænomenorum, quæ in caminis seu fumi-ductibus observantur, fumus enim altum petit, quia aëre levior est, quod constat experimentis de fumo in vacuo, ubi descendisse visus fuit, sumtis: idem igitur est de fumo ascendente,

dente, quod de aqua descendente: hæc autem in fig. 18. eo celerius effluit per orificium MN, quo amplius est, & quo humilius positum: ergo etiam fumus eo celerius caminum transibit, eoque magis ignis in foco accendetur, quo altius ducetur caminus, & quo magis superiora versus divergit, si modo non nimis divergat; quod utrumque experientia confirmat; Ipse deinde insuper expertus sum, si caminus alicubi perforetur, tantum abesse, ut fumus per foramen istud exitum tentet, quin potius aër magno impetu irruat, seque fumo miscens per caminum ascendat, non secus atque aërem per foraminulum *e* in tubum FGNM (Fig. 18. & 19.) irrumpere indicavimus. Ita vero fumus minori certe copia, aut saltem difficilius ascendet ignisque remittet.

Cæterum duæ sunt potissimum causæ, altera aliena altera naturæ rei propria, quæ motum aquæ valde retardare possunt in fig. 18. & 19. Prior est adhæsio aquæ ad latera tubi, & altera, quod cum tubus amplitudine crescit velocitas aquæ, nullibi sibi constans in quovis tubi loco mutetur, quæ mutatio si oriri censeatur ab impulsibus infinite parvis aquæ velocius motæ in aquam minus velociter motam, apparet singulis momentis ab impulsibus his corporum mollium aliquid de *ascensu potentiali* perdi, unde necessario aquarum effluxus notabiliter diminuitur.

§. 26 Loco ultimo nunc dicam quædam de vasis recurvis, ex quibus aquæ non omnes effluunt: brevitatis autem gratiâ canalem considerabimus cylindricum, & cujus quidem pars, quam superficies aquea non transgreditur, sit recta.

Problema.

Sit nempe canalis cylindricus CEDB (Fig. 20.) cujus pars CE quanta sufficit est recta, reliqua EDB utcunque incurvata; fuerit canalis totus aqua plenus effluxura per foramen B, perveneritque superficies aquæ ex C in F, quæritur altitudo respondens velocitati aquæ in F.

Fig. 20.

Solutio.

Ducantur verticalis BH & horizontales CH, FG, AB, sitque sinus anguli HCE ad sinum totum ut 1 ad g: Jam vero si rem recte perpendamus, videbimus contineri problema præsens in altero generaliori, quod suprà paragrapho 20. tractavimus, ubi habuimus hanc æquationem:

$$v = \xi^{\frac{mm}{nn}-1} \int -x\,\xi^{-\frac{mm}{nn}}\,d\xi$$

ubi

ubi pro nostro casu præsente intelligitur per v altitudo quæsita respondens velocitati superficiei aqueæ in situ F, per ξ longitudo B D E F & per x altitudo BG, atque per $\frac{m}{n}$ index rationis inter amplitudines tubi & foraminis B: Quod si vero dicatur longitudo B D A $= \alpha$ erit $x = \frac{\xi - \alpha}{g}$, unde nunc habetur

$$v = \xi^{\frac{mm}{nn} - 1} \int -\left(\frac{\xi - \alpha}{g}\right) \xi^{\frac{-mm}{nn}} d\xi$$

Indicetur longitudo totius canalis B D E C per C, & erit

$$\int -\left(\frac{\xi - \alpha}{g}\right) \xi^{\frac{-mm}{nn}} d\xi = \frac{nn\alpha}{g(nn - mm)} \left(\xi^{\frac{nn - mm}{nn}} - C^{\frac{nn - mm}{nn}}\right)$$

$$\frac{-nn}{g(2nn - mm)} \left(\xi^{\frac{2nn - mm}{nn}} - C^{\frac{2nn - mm}{nn}}\right)$$

atque proinde

$$v = \frac{nn\alpha}{g(nn - mm)} \left(1 - \left(\frac{C}{\xi}\right)^{\frac{nn - mm}{nn}}\right)$$

$$- \frac{nn\xi}{g(2nn - mm)} \left(1 - \left(\frac{C}{\xi}\right)^{\frac{2nn - mm}{nn}}\right). \text{ Q. E. I.}$$

Scholium.

§. 27. Quoniam hæ æquationes sunt paullo prolixiores, non immorabimur generali earundem contemplationi, consideratur potius casus istos particulares, qui calculum abbreviant, nec ultima ista æquatione definiri possunt.

Si operculum in B omne abesse ponamus, fit $m = n$ & (quod seorsim pro hoc pariter atque altero casu mox dicendo erui debet)

$$v = \frac{b - \xi + \alpha \log. \xi - \alpha \log. C}{g}$$

tuncque velocitas maxima est in A, nominatimque talis, quæ respondet altitudini $\frac{C - \alpha + \alpha \log. \alpha - \alpha \log. C}{g}$

Denique punctum E maximo respondens descensui obtinetur ope hujus æquationis,

$$\xi - \alpha \log. \xi = \zeta - \alpha \log. \zeta$$

Alter casus seorsim subducendus calculo est, cum $mm = 2nn$, ubi oritur

$$v = \frac{\alpha\xi - \alpha\zeta - \xi\zeta \log. \xi + \xi\zeta \log. \zeta}{g\zeta}$$

atque si capiatur, posito c pro numero, cujus logarithmus est unitas, $\xi = c^{\frac{\alpha - \zeta}{\zeta}}\zeta$ determinabitur sic locus maximæ velocitatis, cujus altitudo generatrix est $= c^{\frac{\alpha - \zeta}{\zeta}}\zeta - \alpha$, dum maximus descensus, qui proportionalis est toti aquæ effluenti, definitur faciendo

$$\alpha\xi - \alpha\zeta - \xi\zeta \log. \xi + \xi\zeta \log. \zeta = 0$$

Non dubito, quin hæc ad amussim experientiæ essent responsura, si modo adhæsio aquæ ad latera tubi motum non retardaret; puto tamen, eventum experimentorum talem esse posse, ut intelligenti, qui horum impedimentorum rationem habeat, satis ostendant propositionum veritatem.

§. 28. Ultimo loco communicabo veram solutionem phænomeni alicujus, quod primo aspectu valde videtur paradoxon. Postquam enim ex omnibus hactenus dictis luculenter apparet fieri non posse, ut aquæ multo majori velocitate effluant quam qualis altitudini aquæ supra foramen debetur, (possunt tamen aliquanto majori, præsertim si foramina sunt magna, *confer ea quæ dixi de velocitatibus maximis* §. 15.) multis mirum fortasse videbitur, *contingere aliquando in fontibus salientibus, ut aqua ad temporis momentum jactum faciat longe altiorem, quam secundum regulas nostras fieri posse videtur.* Verum tantum abest, ut hæ inde aliquid roboris perdant, quin potius egregie confirmentur. Solutio autem paradoxi in eo consistit, quod nos hactenus aquas consideraverimus continuas, & nullo vacuo aëreo separatas: Recteque observavit D^us. De la Hire non fieri hujusmodi saltus irrregulares, nisi aër una cum aqua tubum prope scaturiginem fuerit ingressus, quod sæpe fieri indicavi §. 25. Iste vero aër simul cum aqua fertur usque ad orificium effluxus, per quod mox erumpit: id dum fit, massa aquea impetum

tum acquirit, qui in expellendas aquas solus impenditur, hocque pacto enormem jactum producit. Hanc phænomeni caussam mox clarius una cum debitis mensuris explicabo, postquam præmisero verba, quæ hâc de re extant, *in histor. Acad. Reg. sc. Paris. ad An. 1702. On voit quelquesfois*, dicitur in loco citato, *l'eau qui sort par un ajutage saillir trois ou quatre fois plus haut que ne lui permét la hauteur du réservoir, aussi se rémet-elle bien vite à la hauteur, que lui prescrivent les loix de l'hydrostatique. Mais comment a-t-elle pu en sortir en un instant. Msr. De la Hire l'attribue a de l'air enfermè dans la conduite, qui ayant été pressé & mis en ressort par l'eau, qui descendoit toujours, s'est debandé contre celle qui montoit & lui a donné cette vitesse momentanée.*

Recte itaque animadvertit Dn. De la Hire aëri saltum deberi, dubiumque nullum est quin veram rationem, quâ aër id producere possit, fuisset eruturus, si phænomenon, quod obiter attigit, attentius considerasset, facile utique perspecturus, aërem inter medias aquas nullam sustinere pressionem, nisi super incumbentis aquæ (imo ne hanc quidem in aquis fluentibus, uti inferius in sect. XII. demonstrabo) nec adeoque aërem compressum fortius expellere posse aquam sibi præcedentem, quam si sui loco aqua esset. Ego quidem prævidi (quod facillimo experimento sæpe postea sum expertus) non esse aquam ante aërem positam solito altius assurgentem, sed illam, quæ aërem sequitur, quod nunc clarius faciam.

Sit igitur in Figura vigesima aquæ ductus CADB cylindricus, ut esse solet, isque totus aquâ plenus, præter particulam mnB aëre plenam. Ducantur lineæ horrizontalis & verticalis CH & HB: ponamus brevitatis ergo aëris gravitatem præ gravitate aquæ nullam censeri posse, ita ut transitus aëris per orificium B nihil resistat fluxui aquæ, quamvis de cætero facile foret inertiæ aëris rationem habere, nisi calculi prolixitatem evitare vellemus in re, ubi nullam quærimus præcisionem. Sit longitudo canalis CADf vel CADm (ponimus enim differentiolam mf aëre repletam valde parvam) $= c$; mf vel $ng = \delta$: HB $= a$; amplitudo tubi $= m$, amplitudo orificii B $= n$; Denique demus aquæ, cum superficies est in mn, nullum esse motum, quæsituri altitutitudinem velocitati debitam, quam superficies mn habet, cum pervenit in situm fg; sit ista altitudo $= v$, erit *ascensus potent.* omnis aquæ eo ipso momento pariter $= v$: *Descensus actualis* autem est per §. 7. = tertiæ proportionali ad totam massam aquæ, particulam aquæ $mngf$ & altitudinem verticalem HB, id est, $= \frac{\delta}{\zeta} a$; est igitur $v = \frac{\delta}{\zeta} a$. Hæc quidem altitudo dicto citius minuitur statim atque aqua per orificium B fluere cogitur, quod demonstravi §. 18. sed primo tamen temporis puncto aqua servabit motum quem acquisivit, & sic guttula orificio proxima ejicietur velocitate, quæ debeatur altitudini $\frac{mm\delta}{nn\zeta} a$. Potest autem hæc altitudo non solum esse tripla aut quadrupla ipsius a, sed & quantumcunque magna: ego certe cum tubis vitreis pro lubitu jactus feci decies aut vigesies altiores ipsius a; fuerit v. gr. $\delta = 100$ pedum, $\zeta =$ uni pollici, diameter autem tubi decupla diametri, quam orificium habet; & erit $\frac{mm\delta}{nn\zeta} = \frac{10000}{1200} a$, ita ut in his circumstantiis prima guttula assilire demta aëris resistentia debeat ad altitudinem plusquam octies majorem altitudine solita a. Sunt cœterum multa impedimenta eaque maximi momenti, quæ jactus enormes cohibeant; perditur nempe aliquid de motu ab impulsu superficiei aqueæ mn in latera fg, dein etiam ab ingenti attritu quem aqua per foraminulum, quod parvulum esse debet, tam celeriter lata patitur: multum etiam abest, quominus aqua C A D m omni sua celeritate moveatur ob adhæsionem aquæ ad latera tubi, quæ adhæsio in tam longo tractu valde notabilis est.

Interim veram hanc esse solutionem phænomeni nullum potest esse dubium, istique solutioni experimenta quæ feci in omni extensione satisfaciunt. Dein hâc theoria etiam recte solvitur alterum phænomeni momentum, quod nempe jactus iste sit quasi momentaneus, postque brevissimum tempusculum ad sensus non major solito: ita in præsenti, quem modo finximus, casu si per regulam §. 18, paullo mutatam (ibi enim de vasis verticaliter positis tantum dicitur) exploremus, quantum aquæ effluere debeat ut jactus non amplius millesima parte (quæ utique observari in hujusmodi experimentis minimè potest) superet jactum solitum, cum ab initio fuerit eodem octies major, invenimus tam parvam esse illam quantitatem, ut tempus, quo tota ejicitur, nullo modo percipi possit.

Expe-

Experimenta quæ ad Sect. 3. pertinent.

Prænotanda.

Plurima quidem sunt in hâc Sectione eaque fere præcipua, quæ vix ad experimenta revocari *immediate* possunt; Etenim cum Auctores hactenus motum in fluidis effluentibus alium nôn consideraverint, quam qui fiunt per foramina valde parva, cumque proin nova sit theoria quam dedimus pro amplitudinibus foraminum qualibuscunque, hæc ipsa est, cujus confirmatio maxime juvaret. At non video, quomodo in Cylindris verticalibus, de quibus potissimum egimus, velocitas aquæ effluentis observari possit, præsertim cum foramen est valde amplum (secus enim ex tempore depletionis aliquod de velocitatibus judicium ferri potest.) Hæc ita perpendens cogitavi demum scopo nostro inservire posse paragraphos 16. & 20. in quorum priore determinata fuit velocitas maxima aquæ effluentis ex cylindris verticaliter positis, in altero autem demonstratum est, eundem esse motum ex cylindris oblique positis & verticalibus, si utrobique altitudines verticales similes assumantur: Commode igitur utemur cylindris oblique positis, ut ex maxima amplitudine jactus aquei possit velocitas maxima aquæ seu altitudo eidem debita experimento haberi: & hâc quidem ratione accurate velocitas illa maxima, qualis revera est, explorari potest, etiamsi foramina sint quantumlibet magna, quæ proin si convenire observetur cum regulis nostris, de integra theoria dubium superesse nullum poterit.

Priusquam vero rem ipsam aggrediar, præmittendum erit theorema mechanicum, quod sequitur.

Lemma.

Sit AB (Fig. 21.) linea verticalis, BD horizontalis; linea autem AD directionem habeat qualemcunque, sub cujus directione corpus in A projectum intelligatur, arcum describens parabolium AC, cujus nempe tangens in A est recta AD, erit altitudo debita velocitati, qua corpus in A projectum fuit, $= \frac{BC^2 \times AD^2}{4AB.BD.CD}$ atque si AD fuerit horizontalis sive angulus BAD rectus, erit eadem illa altitudo $= \frac{BC^2}{4AB}$. Fig. 21.

Jam vero quæ mihi observata fuerint exponam.

De Velocitatibus maximis fluidorum per foramina valde ampla effluentium.

Ad §. 16. & 20.

Experimentum Primum.

Fig. 22. TUbum Cylindricum F A (Fig. 22.) longitudinis quatuor pollicum oblique ad horizontem posui, in eoque situ firmavi, erat autem amplitudo tubi ad amplitudinem luminis in A ut 2 ad 1. & quidem diameter tubi præter propter septem lineas exæquabat; Dein mensuris acceptis in particulis æqualibus linearum F E, A B & B D (quarum lex ex ipsa figura per se patet) illas inveni 81. 619. & 740.

His ita præparatis, tubum aquâ replevi, digito interim obturato orificio A, eoque confestim remoto aquæ brevissimo tempusculo effluxere omnes: observare tamen potui, primas & ultimas propius ad verticalem A B, quam medias cecidisse; guttas autem longissime projectas incidisse in locum C invenique post sæpius repetitum experimentum B C particularum, quibus antea usus fueram, 235.

Jam vero si per præmissum lemma quæratur altitudo E G, ad quam guttæ maxima velocitate ejectæ ascendere possint, reperitur E G = 56. part. deberet autem vi §. §. 16. & 20. esse = 62. nisi attritus aquæ ejusque adhæsio ad latera tubi impedimentum motui afferret: majorem consensum non expectavi.

II. Positis quæ prius, diminuto tantum ad dimidium foramine A, ita ut amplitudo tubi esset quadrupla amplitudinis ad lumen pertinentis, observavi B C = 252; Hinc deducitur E G = 68 per experimentum; per theoriam autem debuisset esse = 70; numeri hi minus differunt quam præcedentes, quia hîc multo minus fuit attritus impedimentum ob diminutam velocitatem internæ aquæ. Utrumque autem experimentum egregie profecto theoriam confirmat.

De

De velocitate aquæ ex vase amplissimo erumpentis.

Ad §. 17.

IN isto paragrapho dicimus, si vas sit amplissimum, aquam mox, postquam superficies interna aliquantulum descendit, erumpere velocitate, quæ constanter respondeat altitudini aquæ supra foramen. Sinas autem sub quâcunque directione (neque enim in vasis amplissimis directio venæ quicquam velocitatem mutare potest) aquam effluere, & observes quocunque temporis puncto, in quanta distantia ab verticali vena in horizontem impingat, & exinde per præmissam regulam quære altitudinem velocitati aquæ effluentis eo temporis puncto respondentem, sic semper istam altitudinem invenies æqualem altitudini aquæ supra centrum foraminis, si modo excipias primas guttulas, quæ vi §. 16. minori velocitate effluere debent & actu effluunt: Neque impedimenta, quorum sæpius mentionem injecimus, ullam notabilem moram fluxui injicient, si modo diameter foraminis duas aut tres lineas minimum exæquet, & diameter ipsius vasis non sit infra aliquot pollices, & denique altitudo aquæ nimia non sit, veluti plurium pedum.

Hæc omnia sæpe expertus sum, experimenti autem genus nimis est triviale, quam ut prolixe describi mereatur.

De vasis quæ sunt Tubis verticalibus instructa.

Ad §. 22. & 23.

DE his experimenta sumsit Cel. s'Gravesande *in Phys. Elem. Math.* quæ repetii; ea vero quæ ad rem præsentem faciunt huc potissimum redeunt.

In Figuris nempe 23. 24. 25. 26. sunt singulæ aperturæ littera A notatæ, inter se æquales, solâ B existente paullo majore in ratione ut 16 ad 25, amplitudines quoque, ut & altitudines cylindrorum sunt æquales excepto ultimo, cujus longitudo quadrupla est: tubi autem duobus cylindris intermediis annexi, triplam habent longitudinem cylindrorum. His igitur vasis aqua repletis de ejus effluxu observatum fuit. Fig. 23. 24. 25. & 26.

I. Superficiem aquæ à principio non citius descendere in Fig. 23. quam Fig. 24. postquam vero utrobique aliquid aquæ effluxit, multo celeriorem fieri

fieri motum in vase composito quam in simplici; utrumque præmonui in fine §. 23. Res autem melius & accuratius intelligitur ex æquationibus differentialibus, quas §. §. 22. & 23. dedimus, quibus si utamur ad prima motuum incrementa invenienda, tam in cylindro simplici Fig. 23. quam in composito Fig. 24. atque hunc in finem ponamus amplitudines cylindri & tubi esse ut m ad n, erit incrementum, quod vocavimus $d v$ in vase simplici ad incrementum in vase composito, ut $1 + \frac{3m}{n}$ ad 4, adeoque longe majus in isto casu quam in hoc. Si proin primum motum recte percipere liceret, celeriorem statim illum observaturi essemus, qui fit in Cylindro simplici; Cum vero in §. 15. & 23. porro demonstratum fuerit, superficiem aquæ, postquam paululum descendit, utroque vase proxime tales esse, quæ respondeant altitudinibus $\frac{nn}{mm} x$, intelligendo per x altitudines aquæ supra orificia, per quæ effluit; sequitur mox multo majori velocitate aquam descendere in Fig. 24. quam Fig. 26. Sic igitur Theoria plane convenit cum observatis.

II. Superficiem aqueam non parum velocius descendere in Figura 26. quam 24. ita ut velocitas in casu Fig. 24. sit quasi media inter casus Figuræ 23. & 26. Hic vero rursus patet, primas quidem accelerationes multo tardius fieri in cylindro Fig. 24. quam 26. Hoc igitur respectu ipsa theoria indicat, quod observatum fuit; at certe differentia multum abest, ut tanta inde oriri possit, quantam expertus fui, neque amplius sensibilis esse deberet, postquam utrobique superficies paullulum descendit, per §. 23. debet autem reliquum impedimento tribui, quod ab attritu aquæ in Fig. 24. oritur: aqua enim per tubum A A magna velocitate fertur, sicque tam ob velocitatem auctam, quam ob amplitudinem vasis diminutam impedimentum motui aquæ validissimum offertur.

III. Denique velocissime, si prima temporis puncta excipias, aqueam superficiem descendere in Cylindro Fig. 25. & notanter velocius quam in Fig. 26.

Id vero conforme est cum his quæ §. 23. demonstrata sunt; deberent autem mox post commune motus initium, positis nempe altitudinibus aquæ supra orificia effluxus fere æqualibus, velocitates in Figuris 25. & 26. proxime esse ut amplitudines orificiorum B & A, id est, ut 25. ad 16. & quod minor observetur velocitatum differentia, rursus impedimento frictionis est tribuendum præter aliam causam in fine §. 25. indicatam.

De

De iisdem vasis, quibus tubi horizontales inseruntur.

Ad §. 24.

Cum aquæ ex vase valde amplo veluti C D G (Fig. 19.) per tubum horizontalem G M ampliorem in extremitate N M quam ortu G F fluunt, majori velocitate illas ferri per orificium G F (si rursus excipias primas guttas) quam si vel tubus abest, vel Cylindricus esset. Id etiam Frontinus experientiâ procul dubio edoctus affirmavit, alii vero moderni negarunt.

Igitur operæ pretium duxi rem experimento explorare. Erat autem altitudo vasis, quo usus sum, supra axem tubi = 5 ½ *poll. Angl.* longitudo tubi G N = 2 *poll.* 5 *lin.* diameter orificii G F erat = 3, 36. *lin.* diameter aperturæ M N = 5, 48. *lin.* erant proin amplitudines orificiorum ut 3. ad 8 proxime, amplitudo vasis sat magna erat, ut infinita censeri posset præ amplitudine tubi. Volui omnes mensuras allegare, ut quivis experimentum repetere possit. Hoc autem vase aqua repleto observavi amplitudinem jactus, & ex hâc postquam omnes mensuras cognovissem requisitas calculum posui de altitudine, quæ velocitati aquæ transfluentis tum in G F, tum in N M deberetur: hanc inveni proxime undecim linearum, atque proin alteram = *poll.* 6. *lin.* cum duabus nonis lineæ partibus, quas easdem altitudines alio etiam experimenti genere inveni. Quoniam autem major est altitudo 6. *poll.* cum 6 $\frac{2}{9}$ *lin.* quam 5 ½ *poll.* confirmatur theoria nostra de acceleratione aquæ internæ ab amplificatione tubi versus extrema, quamvis multum absit, ut duabus potissimum rationibus §. 25. allegatis inductus præmonui, quin tantum revera acceleretur quantum vi §. 24. remotis obstaculis, quorum in calculo nulla ratio habita fuit, deberet.

Ad §. 25. Hoc paragrapho in transitu monui, multis modis fieri posse, ut aër aquæ per tubos fluenti misceatur. Inde autem futurum, ut aquæ minori copia effluant quidem, sed non minori velocitate, quod utrumque ut experirer primo in tubis A A & A B (Fig. 24. & 25.) non procul ab eorundem Origine parvulum utrobique feci foramen; factum est, ut aquæ per tubos, cum aliquo strepitu ferrentur & turbidæ effluerent, superficies autem solito multo lentius descenderet; Deinde tubum Figuræ 19. pariter aliquantulum perforavi, haud procul à G[illegible]que observavi, paullo lentius descendere superficiem internam, cujus rei me certum fecit quod numerabam oscillationes alicujus penduli, quibus superficies per datum spatium descendit: ratione autem aquarum effluentium vidi aliquando aquas pleno orificio effluere & tunc aquas solito minus esse pellucidas, jactum autem ordinarium vel ordinario paullo majorem facere; sæpissime autem aquam & aërem juxta se ferri, illam in parte tubi inferiore juxta latus F M, hunc in superiori juxta G N & tunc aquas esse limpidas atque velocitate ejici solito non solum haud minori, sed & multo majori, quod fieri posse haud obscure præyideram. De hâc re in sequenti Sectione aliud experimentum majori præcisione institutum apponam.

Dabitur autem fortasse alibi locus demonstrandi aquas sufficienti aëris quantitate permistas, ea proxime effluere copia, qua effluerent rescisso tubo eo in loco ubi est perforatus, cui rei ipsam quoque experentiam respondere animadverti.

De canalibus recurvis.

Ad §. 27.

Fig. 27. DUcta in pariete horizontali M N (Fig. 27.) tubum cylindricum C D B totum aquâ plenum, cruraque ambo inter se parallela habentem, ita posui, ut extremitas altera B horizontalem M N raderet, simulque crura essent verticalia, dum interea orificium C digito obturabam aquæ effluxum sic compescens.

Dein remoto digito observavi, altitudinem maximam B P, ad quam aquæ effluentes ascendebant, aliisque vicibus attendi ad locum E, ad quem descendit aquæ superficies; feci autem sub duabus diversis circumstantiis experimentum; primo enim loco nullum in B posueram operculum; deinde operculum adhibui tali lumine perforatum, quod amplitudinem haberet ratione amplitudinis tubi ut 1. ad $\sqrt{2}$. Interim mensuræ tales fuere: C A $=$ 345; A D B $=$ 530; B P $=$ 33; & A E $=$ 88. particulis, quarum 375 longitudinem Pedis Lond. exæquabant. Hæc ita fuere in casu priori, in altero autem manentibus reliquis vidi B P $=$ 64 & A E $=$ 54. Notabo hic in transitu, quod alio explorare cupiens modo maximum descensum A E, post finitum experimentum inclinaverim tubum, donec aqua jam jam effluxui per B proxima

xima videbatur, quo temporis puncto distantiam mensuravi superficiei à loco A antea notato; distantia illa, quam eandem cum maximo descensu A E fore putabam, opinione longe minor fuit; unde edoctus fui partem aquæ, quæ in experimento jam per B effluxerat, tubum rursus ingressam fuisse.

His ita observatis, magnitudines B P & A E calculo quæsivi ad normam §. 27. ponendo m primo $= n$ deinde $m = 2n$, inveni autem in casu priore B P $= 79$. quæ in experimento non superavit 33. maximumque descensum A E proxime reperi $= 250$. quem experimentum dedit 88. dein pro casu $m = 2n$ oritur B P præter propter dupla illius, quæ observata fuit & A E $= 186$. quæ 54. particularum observata fuit.

Enormes has differentias maxima ex parte adhæsioni aquæ ad latera tubi tribuo, quæ certe adhæsio in hujusmodi casibus incredibilem exercere potest effectum, usus enim sum tubo vix ultra duas lineas in diametro habentem, majorem utique consensum experturus cum tubo ampliore. Interim verisimile est, curvaturam tubi in parte inferiore, aliquid etiam motui derogare.

Ad §. 28. Eodem tubo recurvo, quem modo descripsi, usus sum: operculum autem posui in B minimo foramine pertusum: feci ut totus aquâ esset plenus præter particulam F G B, in quo situ aquam detinui ope digiti orificio C appositi. Remoto digito descendit aqua, & cum pervenisset in situm H D B, guttulæ aliquot tanto impetu per foraminulum in B fuerunt veluti explosæ, ut ad altitudinem plusquam decem pedum ascenderint, quamvis altitudo H A altitudinem dimidii pedis vix superaret. Interim ob exiguitatem foraminuli tantam resistentiam offendit aqua dum transiret orificium, ut fracto impetu aqua non solum non ad altitudinem A H ascenderit (supra quam tamen remotis omnibus impedimentis assilire paullulum continue debuisset) sed vix guttula una aut altera notabili temporis mora fuerit expressa, ita ut mihi persuadeam, si absque impetu sola aquæ pressione naturali tantus jactus producendus fuisset, id fieri non potuisse nisi altitudine minimum centum pedum.

Dein etiam observavi jactum aquæ diminui eo magis quo minus ante experimentum relinquitur spatium G B; quæ omnia theoriæ sunt conformia. Mensuras superfluum fuisset sumere, quia ob nimia impedimenta tantus esse utique nequit jactus aquæ, quantus illis remotis futurus fuisset. Attamen ut & has convenire cum formulis experimento confirmarem, tubum C D B sumsi ampliorem, ut impedimenta adhæsionis maxima parte auferrem, pars

DFB parvula erat, minorque etiam pars GB, quam in experimento ab aqua relinquebam vacuam: ac denique operculum foramine non admodum parvo erat pertuſum. Et tunc vidi ſaltum non multum admodum defeciſſe ab altitudine $\frac{mm\delta}{nn\zeta}a$, quam §. 28. pro hoc negotio dedi, imo memini me præſenti Amico altitudinem ſaltus recte prædixiſſe, poſtquam perpendiſſem, quantum in calculo præter propter impedimentis eſſet dandum.

Similem aquæ exploſionem *momentaneam* eamque à ſimili cauſa oriundam facillime obtinebis cum fontibus, qui aquas per fiſtulam pleno orificio ejiciunt. Si enim digitum orificio fiſtulæ ſubito ita apponas, ut pars orificii aperta maneat, protinus aquas magno impetu expelli videbis, moxque tenue aquæ filum intra priſtinos velocitatis limites reduci. Obſervabis etiam aquas eò majori impetu atque longius projici quo minus digito relinquas foramen, atque pro eodem relicto foramine, jactum inſolitum eò magis protrahi (utut ſemper breviſſimum) fierique oculis ſenſibiliorem, quo longior eſt fiſtula, ita ut in fontibus ſalientibus, ad quos aquæ ex caſtello per longiſſimos canales feruntur, ſi canales non eſſent admodum ampli & aquæ pleno effluerent orificio, non dubito quin ſic per notabile temporis ſpatium vehemens aquæ jactus protrahi poſſet, gradatim ad ſolitam velocitatem rediturus: Hæc omnia conformia ſunt cum iis, quæ §. §. 28. & 18. monita fuerunt.

Experimentum hoc me aliquando & prima quidem vice feciſſe memini coram V. V. Cel. D. D. De Maupertuis & Clairaut, cum quibus antea in ſermonem de rebus iſtis aquariis forte delapſus eram. Quamvis autem hic nullus ſit aër, qui accuſari poſſit, revera tamen phænomenon iſtud ab eo, quod D. de la Hire obſervatum fuit, non differt, & utrumque ab eo provenit, quod motus aquæ in canali contentæ, vel ſaltem motus iſtius pars perire non poſſit, ſine ullo inde proveniente effectu, quem ipſe enormis aquarum jactus conſtituit.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO QUARTA.
De variis temporibus, quæ in effluxu aquarum desiderari possunt.

§. I.

RES videbitur multis omnino Geometrica, quæ scilicet nulla consideratione physica opus habeat, ut, cum aquæ ex dato vase per lumen cognitum velocitatibus in omni situ determinatis effluunt, tempus definiatur, quo data effluat aquæ quantitas. Attamen experientia contrarium docet; nam multo minori quantitate aquæ effluunt per foramina, quæ sunt in lamina tenui, quam ex simplici velocitatum consideratione sequeretur, idque plerumque (nec enim res sibi constat in diversis circumstantiis) in ratione ut 1 ad $\surd 2$; movit hoc Newtonum, ut affirmaret in prima *Princ. math.* editione aquam ex vase ea effluere velocitate, quæ generetur altitudine dimidia aquæ supra foramen, cui opinioni omnia experimenta de velocitatibus immediate sumta, contradicunt. Explorans postmodum ipse magnus Vir hujus contradictionis originem, eam positam esse observavit in contractione venæ aqueæ, quæ contractio mox præ foramine fieri solet. Alia quoque mihi observata fuit venæ mutatio priori nunc similis nunc contraria. Nempe cum aquæ non per simplex foramen, verum per tubulum effluunt, rursus contrahitur vena, si tubus exteriora versus convergit, sed dilatatur si idem divergit. De contractione venæ aqueæ per tubos convergentes effluentis accuratissima sumsit experimenta Joh. Polenus in libro de *castellis* p. 15. & seqq. contractio venæ eo major à Viro Celeberrimo observata fuit, quo amplius erat orificium tubi conici internum manentibus orificio externo atque longitudine tubi, quæ ratio est, quod similis aquæ quantitas ceteris paribus eò tardius effluxerit, quò amplius fuerit orificium internum, quamvis impedimenta ab adhæsione aquæ ad latera tubi minorem continue habuerit effectum: fecerunt autem istæ impedimentorum diminutiones, ut aquæ majori velocitate in loco, quo vena maxime erat contracta, fluerent, & nihilominus parcius erogarentur: verum id esse colligitur ex observatis effluxus temporibus & venarum, ubi maxime contrahuntur, amplitudinibus. Igitur cum in hisce venæ mutationibus cardo rei vertatur, è re erit phænomena uberius examinare & explicare.

§. 2. Assumamus v. gr. cylindrum verticalem, qui in medio fundi horizontaliter positi, habeat foramen, aqua autem interna divisa concipiatur in strata horizontalia: His ita positis, censuimus motum cujusvis strati eundem esse & talem quidem, ut situs horizontalis in illis conservetur, ubi tamen monui, non posse hanc hypothesin extendi ad strata foramini proxima, quoniam vero inde nullus error sensibilis oriri possit ratione velocitatis aquarum effluentium, operæ pretium non esse, ut ejus rei ratio habeatur. Nunc vero, quando alia phænomena à motu aquæ internæ obliquo, qualis præsertim in prædictis stratis foramini proximis est, pendent, hunc paucis lustrabimus.

§. 3. Mihi autem videtur motum aquæ internæ talem esse concipiendum, qualis foret si aqua ferretur per tubulos infinitos juxta se positos, quorum intermedii proxime rectà à superficie versus foramen descendunt, reliquis sensim se incurvantibus prope foramen, uti Fig. 28. *a* ostendit, ex quâ apparet, singulas particulas hoc modo descendere motu tantum non verticali, donec fundum prope attingant, easque tunc cursum suum sensim versus foramen inflectere, ita ut particulæ fundo proximæ motu fere horizontali, alteræ magis verticaliter ad foramen effluant. Hujusmodi motus sæpe oculis observare potui, cum particulæ ceræ, quam vocant Hispanicæ, innatabant aquæ. Exinde autem intelligitur non posse singulas particulas foramini adstantes directionem suam integram servare, neque tamen ita eam inflectere, ut motum axi plane parallelum assumant, sed fore potius, ut vena aquæ effluentis contrahatur usque in *d e*, ubi sic notabiliter gracilior erit, quam in ortu circa foramen *a c*. Hæc autem contractio venæ verticaliter fluentis non confundenda est cum alia contractione, quæ fit ab acceleratione aquæ. Dein patet quoque, quod cum singularum particularum foramini adstantium diversa sit directio, necessario ab impetu, quem in se mutuo faciunt eædem particulæ, vena compri-

Fig. 28. *a*.

primatur, atque sic gracilescat. Et ab ista compressione fit, quod alias contradictionem involveret, ut aqua jam jam egressa, etiamnum præ foramine acceleretur, & sic *ascensus potentialis* crescat, etiamsi ad alteram accelerationem omnibus corporibus cadentibus communem non attendamus, ceu huc non pertinentem, & cujus deinceps mentionem non faciemus. Hæc autem nisi me fallat opinio, res erit porro hunc in modum tractanda.

(I.) Eousque vena aquæ consideranda est, donec particularum velocitates amplius non mutentur, quod quamvis nunquam fiat omni rigore, attamen non procul à foramine fieri censendum est, veluti in *d e*. Hoc autem si ita fuerit & aquæ ex vase A B C D per foramen *a c* effluere ponantur, erit loco vasis simplicis A B C D concipiendum aliud compositum A B *a d e c* C D.

Quicquid igitur in præcedente sectione præmissum fuit, pro determinandis ubique velocitatibus, id omnino locum habebit, si loco vasis subjecti concipiatur vas, quod dixi tubulo contracto instructum. Nec tamen hæc correctio, ratione præmissæ nostræ methodi velocitatum aquæ effluentis determinandarum, sensibilem mutationem producere potest ob brevitatem tubuli *a d c e*, potest autem valde notabilem ratione quantitatis, quia aquæ non tam per orificium *a c*, quam per *d e* effluere censendæ sunt.

(II.) Sic erunt velocitates in diversis locis ipsius venæ reciproce ut amplitudines sectionum respondentium & cum in vasis amplissimis velocitas in *d e* talis sit quæ toti altitudini aquæ conveniat, simulque experimentis constet, amplitudines *a c* & *d e* proxime esse ut $\sqrt{2}$ ad 1, putavit Newtonus sic confirmari posse theoriam suam, qua statuit aquam ex foramine vero velocitate effluere quæ debeatur dimidiæ altitudini aquæ supra foramen, quamvis in progressu velocitas aquæ crescat: quâ in re mihi videtur nimium adhæsisse præconceptæ opinioni: neque enim ratio orificii *a c* ad *d e* semper eadem est, neque sic explicari potest motus aquarum ex vase, cui tubulus adhæret: verbo! attenuatio venæ prorsus accidentalis est, potest enim tota impediri, apponendo foramini parvulum tubulum cylindricum vel augendo tantum crassitiem laminæ, cui foramen inest, & tunc sine ulla correctione locum habent tam ratione

tione velocitatum quam quantitatum theoremata, quæ in præcedente sectione exhibita fuerunt.

(III.) Patet autem ex ipsa explicatione supra data de *contractione venæ*, non posse non illam à diversis circumstantiis mutari; ita experimenta docent, diminui eandem ab auctâ laterum foraminis crassitie: an altitudo aquæ supra foramen aliquid conferat non satis scio: crediderim fere crescere aliquantulum contractionem ab aucta altitudine aquæ internæ, quamvis facile parum id fore prævideam: verisimile quoque est, eo minorem cæteris paribus fore contractionem venæ, præsertim verticalis, quo majorem rationem habuerit amplitudo foraminis ad amplitudinem cylindri, quia motus aquæ internæ fundo proximæ eo minus fit obliquus, ita ut si foramen totam amplitudinem cylindri occupet, nulla utique attenuatio venæ aqueæ oriri possit. Ad hoc animum advertant velim, qui hujus contractionis in ipsa velocitatum determinatione rationem habendam esse fortasse cogitabunt. Cum enim foramen non multo minus est amplitudine vasis, nulla oriri potest contractio notabilis & cum foramen est parvum, nulla rursus oritur fere differentia circa velocitates sive foramen aliquantum augeatur sive diminuatur.

§. 4. Eadem propemodum ratio est aquarum horizontaliter, ut de aliis directionibus taceam, effluentium: nam simili modo ab omni parte affluet aqua ad foramen; imo etiam ex inferiori parte ascendet usque ad foramen ut effluere possit, quod ipse sæpe fieri observavi. Simili igitur causa similis fiet in vena effluente attenuatio, quam eo facilius est oculis perspicere, quod hic locum non habeat altera attenuatio ab acceleratione aquæ jam egressæ oriunda. Et ob hanc rationem, si quis observationes circa contractionem venæ facere instituat, is meo judicio melius faciet, utendo venis horizontaliter, quam sub aliâ directione effluentibus.

§. 5. Quanta autem sit contractio, id est, quænam ratio intercedat inter amplitudinem orificii sectionemque venæ horizontaliter effluentis minimam experiri licet vel sumendo actu mensuras diametrorum illis amplitudinibus respondentium, vel etiam mediante quantitate aquæ dato tempore, datisque velocitatibus effluentis, ubi tamen velocitates non tam ex altitudine aquæ supra foramen, quam ex amplitudine jactus deducenda erunt, quandoquiquidem impedimenta nunc majora nunc minora nunquam omnem aquæ velocitatem permittant, quam vi theoriæ, qua horum impedimentorum ratio nulla habetur, acquirere deberet.

§. 6. Ex præmiſſis nunc ſatis patere puto perfectum conſenſum fore inter quantitatem aquæ effluentis ejuſque velocitatem, ſi modo foramini, quod eſt in vaſe, ſubſtituatur aliud foramen eo uſque diminutum, donec ſectionem venæ maxime contractæ non ſuperet: atque perinde erit, in quonam venæ loco, aut in quânam profunditate à ſuperficie aquæ foramen hoc eſſe conſtituatur, ſive in ac ſive in de, quandoquidem velocitates ſemper proxime reſpondebunt toti altitudini aquæ ſupra eum locum, quo foramen fingitur: amplitudinem hujus foraminis mente concipiendi vocabo deinceps *Sectionem venæ aqueæ contractæ.*

§. 7. Quod ſi jam *Sectio* iſta, de quâ modo diximus, conſtantem haberet rationem ad orificium, in eadem ratione diminuendum cogitatione foret foramen effluxus, poſtmodumque calculus de quantitate aquæ dato tempore effluentis inſtituendus. Ita nempe poſita iſta ratione $= \frac{1}{a}$ nominatâque amplitudine orificii n, cenſenda eſſet *Sectio venæ ſolidæ* $= \frac{n}{a}$.

At variabilis cum ſit ſub diverſis circumſtantiis, regulas in hanc rem *à priori* dare non licet: mutatur autem maxime à craſſitie laminæ, in quâ foramen eſt, aucta vel diminuta: aliquid etiam, quamvis id parum, conferre poteſt magnitudo foraminis, amplitudines vaſis, hæque tam abſolutæ, quam relativæ, ut & fortaſſe altitudo aquæ ſupra foramen. Interim aſſumtis lamina tenui, vaſe ampliſſimo, foramine ad 4. vel 6. lineas in diametro aſſurgente; ſolet ratio inter foramen & *Sectionem venæ contractæ* non multum recedere ab illâ, quam Newtonus ſtatuit, nempe ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sæpe autem ab aliis major obſervata fuit, atque ab aliis etiam minor.

§. 8. Quæcunque vero ſit, in quolibet caſu illam indicabimus, ut ante, per $\frac{a}{1}$. Huicque poſitioni nunc calculum pro temporibus ſuperinſtruemus; brevitatis autem gratia conſiderabimus tantum vaſa cylindrica, atque in his duo potiſſimum examinabimus temporum genera; primum quod punctum maximæ velocitatis definit, alterum, quod depletioni reſpondet. In utroque vero caſu motum à quiete incipere ponemus.

§. 9. Fuerit igitur vas cylindricum verticaliter positum aqua plenum, sitque altitudo aquæ ab initio fluxus $= a$, amplitudo cylindri $= m$, amplitudo foraminis $= n$, *Sectio venæ solidæ* $= \frac{n}{\alpha}$ effluxerit jam aqua per tempus t; sitque tunc altitudo aquæ residua supra foramen $= x$, eodemque temporis puncto habeat superficies aquæ internæ velocitatem, quæ respondeat altitudini v: erit velocitas ipsa $= \sqrt{v}$, est autem elementum temporis dt proportionale elemento spatii $-dx$ diviso per velocitatem $\sqrt{v}$, unde $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$.

Determinatus equidem fuit valor ipsius v in *sect.* 3. ubi iisdem denominationibus usi sumus, quibus nunc utimur. At quoniam pro recta aquarum erogatarum mensura requiritur, ut foramini n substituatur *sectio venæ contractæ* $\frac{n}{\alpha}$, sequitur, ut in valore ipsius v eadem fiat substitutio atque sic statuatur $v = \frac{nna}{2nn - mm\alpha\alpha}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{mm\alpha\alpha}{nn}} - \frac{x}{a}\right)$

Hic vero valor si substituatur in æquatione

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{v}}, \text{ oritur}$$

$$dt = -dx : \sqrt{\left[\frac{nna}{2nn - mm\alpha\alpha}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{mm\alpha\alpha}{nn}} - \frac{x}{a}\right)\right]}$$

ope cujus æquationis omnia tempora desiderata definiri possunt per approximationes, seu series, si modo in singulis punctis valor ipsius α innotescat: Assumemus autem esse illum constantis valoris, quandoquidem in præsenti casu nihil sit, à quo mutari possit præter diversas altitudines & velocitates fluidi, quæ parum vel nihil quantum sensibus percipi potest ad id negotii conferunt.

§. 10. Jam ut æquatio desiderata per series exhiberi possit, considerabimus quantitatem.

$$1 : \sqrt{\left[\frac{nna}{2nn - mm\alpha\alpha}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{1-\frac{mm\alpha\alpha}{nn}} - \frac{x}{a}\right)\right]} \text{ sub hâc forma}$$

$$\left(\frac{nnx}{mm\alpha\alpha - 2nn}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm\alpha\alpha}{nn} - 2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ factoremque}$$

po-

posteriorem per regulas solitas resolvemus in hanc seriem

$$1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mmaa}{nn}-2}+\frac{1.3}{1.2.4}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2mmaa}{nn}-4}+\frac{1.3.5}{1.2.3.8}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3mmaa}{nn}-6}$$

+ &c. unde nunc habetur mutata paullulum æquationis forma:

$$dt=-\frac{dx\sqrt{mmaa-2nn}}{n\sqrt{a}}\times\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mmaa}{nn}-\frac{5}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1.3}{1.2.4}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2mmaa}{nn}-\frac{9}{2}}+\frac{1.3.5}{1.2.3.8}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3mmaa}{nn}-\frac{13}{2}}+\&c.\right]$$

Hæc æquatio ita est integranda, ut posita $x=a$ fiat $t=o$; sic autem oritur

$$t=\left[2+\frac{nn}{2mmaa-3nn}+\frac{3nn}{16mmaa-28nn}+\&c.\right]\times\frac{\sqrt{(mmaa-2nn).a}}{n}$$

$$-\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{nn}{2mmaa-3nn}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mmaa}{nn}-\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{3nn}{16mmaa-28nn}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2mmaa}{nn}-\frac{7}{2}}+\&c.\right]\times$$

$$\times\frac{\sqrt{(mmaa-2nn).a}}{n},$$

ubi $2\sqrt{a}$ exprimit tempus quod corpus impendit dum libere delabitur per altitudinem a. Si vero in ista æquatione ponatur

$$x=a:\left(\frac{mmaa-nn}{nn}\right)^{nn:(mmaa-2nn)}$$

quæ est altitudo aquæ cum velocitas maxima est (per §. 16. *sect.* 3. & §. 8. *sect.* 4.), tum obtinetur tempus quod à fluxus principio ad punctum maximæ velocitatis usque præterit; & cum ponitur $x=o$, oritur tempus, quo vas totum depletur, ac denique si ponatur $x=$ cuicunque quantitati c, exprimet t tempus quod superficies insumit in descensum per altitudinem $a-c$; Videbimus autem pro his casibus, quid fieri debeat, cum vas est valde amplum, numerusque m alterum n sic pluries continet.

§. 11. Fuerit primo $\frac{m}{n}$ numerus infinitus, erit altitudo aquæ puncto maximæ velocitatis respondens seu

$$a : \left(\frac{mmaa - nn}{nn}\right)^{nn:(mmaa - 2nn)} = a : \left(\frac{mmaa}{nn}\right)^{nn:mmaa}$$

quoniam autem $\frac{mmaa}{nn}$ eſt numerus infinitus, poterit cenſeri :

$$\left(\frac{mmaa}{nn}\right)^{nn:mmaa} = 1 + \left(log. \frac{mmaa}{nn}\right) : \frac{mmaa}{nn};$$

cujus rei demonſtratio talis eſt: propoſita ſit quantitas infinita A habeaturq; ut in noſtro exemplo $A^{1:A}$, facile quisque videt eſſe hanc quantitatem paullo majorem, quam eſt unitas, & quidem exceſſu infinite parvo, quem vocabimus z; habetur itaque $A^{1:A} = 1 + z$, ſumantur utrobique logarithmi & erit $\frac{log. A}{A} = log. (1 + z) =$ (ob infinitè parvum valorem ipſius z) z; Igitur eſt $A^{1:A} = 1 + \frac{log. A}{A}$: proindeque ſimiliter eſt, ut diximus,

$$\left(\frac{mmaa}{nn}\right)^{nn:mmaa} = 1 + \left(log. \frac{mmaa}{nn}\right) : \frac{mmaa}{nn}$$

Porro quia quantitas hæc unitati addita eſt infinitè parva, erit

$$a : \left(\frac{mmaa}{nn}\right)^{nn:mmaa} \text{ ſeu}$$

$$a : \left[1 + \left(log. \frac{mmaa}{nn}\right) : \frac{mmaa}{nn}\right] = a - a\left(log. \frac{mmaa}{nn}\right) : \frac{mmaa}{nn} :$$

eſt igitur ſpatium per quod ſuperficies aquæ deſcendit, dum à quiete maxima oritur velocitas $= a\left(log. \frac{mmaa}{nn}\right) : \frac{mmaa}{nn}$, ſeu $= \frac{2nna}{mmaa} \, log. \frac{ma}{n}$.

Indicat hæc æquatio deſcenſum aquæ in vaſe infinite amplo infinite parvum eſſe, cum aqua jam maximum velocitatis gradum attigerit: Potuiſſet autem hoc non obſtante dubitari, an non interea quantitas aquæ finita effluat, quandoquidem cylindrus ſuper baſi infinita erectus, utut altitudinis infinite parvæ magnitudinem poſſit habere infinitam : at ſequitur ex noſtra æquatione, hanc quoque quantitatem infinite parvam eſſe, & nominatim æqualem $\frac{2nna}{maa} \, log. \frac{ma}{n}$.

Atque convenit hoc egregie profecto cum phænomenis, quæ in effluxu aquarum ex caſtellis per ſimplex foramen toto die experimur. Cum enim

enim foramen digito obturamus, moxque remoto digito aquas horizontaliter effluere finimus, nullam guttulam in terram delapsam observamus mediam inter jactum longissimum & locum, qui foramini ad perpendiculum respondeat.

§. 12. Prouti in proximo paragrapho determinavimus quantitates utut infinite parvas, descensus aquæ internæ uti & effluentis aquæ dum maximum velocitatis gradum aqua attingit, ita nunc idem præstabimus ratione tempusculi. Dico eutem sufficere in æquatione §. 10. tempus exprimente, ut in utraque serie unicus accipiatur terminus primus, quod apparebit cum quis calculum ad duos extenderit terminos: est igitur tempusculum quæsitum sive

$$t = \left(2 - 2\sqrt{\frac{x}{a}}\right) \times \frac{\sqrt{(mmaa - 2nn).a}}{n}$$

hinc posito pro x valore huc pertinente, qui in præcedente paragrapho fuit definitus, fit

$$t = \left[2 - 2\sqrt{1 - \left(log.\frac{mmaa}{nn}\right) : \frac{mmaa}{nn}}\right] \times \sqrt{\left(\frac{mmaa - 2nn}{nn}\right).a}$$

vel posito $1 - \left(log.\frac{mmaa}{nn}\right) : \frac{2mmaa}{nn}$ pro respondente quantitate signo radicali involuta prodit

$$t = \left[\left(log.\frac{mmaa}{nn}\right) : \frac{mmaa}{nn}\right] \times \sqrt{\left(\frac{mmaa - 2nn}{nn}\right).a}$$

aut denique rejecta quantitate $2nn$ in signo radicali, oritur $t = \frac{2n\sqrt{a}}{ma}.\, log.\frac{ma}{n}$.

Est autem hoc tempusculum infinite parvum, quia, ut notum est, logarithmus quantitatis infinitæ infinities minor est ipsa quantitate. At vero cum sic statim ab initio fluxus, aqua maxima sua velocitate expellitur, mirum prima fronte videbitur fortasse aliquibus, motum in instanti generari finitum: nemo tamen absurdum putabit, massam infinitam, cujusmodi est quantitas aquæ in vase infinito contentæ, posse tempusculo infinitè parvo motum producere finitum, idque sola gravitatis actione.

§. 13. Si præterea in ista vasis infinite ampli positione tempus deplectionis, quod utique infinitum erit, exprimere velimus, erit, ut supra indicatum fuit, in æquatione paragraphi decimi ponendum $x = o$, ſimulque ſolus primus ſeriei terminus adhibendus rurſusque ponendum $m\alpha$ pro $\sqrt{(mm\alpha\alpha - 2nn)}$; atque ſic fit

$$t = \frac{2m\alpha}{n}\sqrt{a}.$$

Tum denique tempus, quod impenditur in deſcenſum ſuperficiei per altitudinem $a - c$ exprimetur in ſimili hypotheſi hac æquatione

$$t = \frac{2m\alpha}{n}(\sqrt{a} - \sqrt{c}).$$

§. 14. Præmiſſæ æquationes non accurate quidem, proxime tamen ſatisfacient, cum vas non infinitæ, permagnæ tamen amplitudinis eſt: imo non multum admodum deficient, cum numerus m vel mediocriter ſuperat numerum n. Liceat quædam hic verba adjicere circa experimentum quod in fine paragraphi undecimi indicavi, deturque hæc venia inſtituto noſtro, quod in phænomenis motuum experientia cognitis potiſſimum verſatur illuſtrandis examinandisque. Dixi autem in citato paragrapho cum aqua horizontaliter effluit, primam guttulam totam ſtatim obtinere amplitudinem jactus; atque idem hoc quidem indicat theoria pro vaſis ampliſſimis; at vero in vaſis mediocriter amplis, quædam guttulæ minori impetu effluere deberent, priusquam punctum maximæ velocitatis adſit, hæque guttulæ incidere deberent in locum aliquem medium inter maximum jactum & punctum, quod foramini verticaliter reſpondet; atque hoc etiam ita fieri obſervavi, ex vaſis amplitudinis veluti decies foramine majoris. Verum cum experimentum aliquando ſumerem de vaſe pedem dimidium alto, quod amplitudinem præter propter centuplam haberet foraminis, ne minima quidem particula aquæ, quantum videre potui, notabiliter à jactu aquæ pleno defecit. Videamus itaque quænam aquæ quantitas in hoc caſu effluere deberet ante punctum maximæ velocitatis; erit autem tanta, quantam continet cylindrus ejusdem amplitudinis in altitudine

$$a - a : \left(\frac{mm\alpha\alpha - nn}{nn}\right)^{nn:(mm\alpha\alpha - 2nn)}$$

(*vid.* §. 10. *ſub. fin.*); nec differt fere hæc minima altitudo ab hac multo compendioſiori, nempe $\frac{2nna}{mm\alpha\alpha}\ log.\ \frac{m\alpha}{n}$ (*vid.* §. 11.) ubi nunc per $\frac{n}{m}$ intelligitur

tur $\frac{1}{100}$ & per a pes dimidius, dum pro α ſubſtitui poteſt $\sqrt{2}$. (non deſideramus enim hic ſummam accurationem) & per *log.* indicatur logarithmus hyperbolicus, ita vero fit,

$$\frac{2nna}{mm\alpha\alpha}\,log.\,\frac{m\alpha}{n} = \frac{1}{20000}\,(log.\,100. + \tfrac{1}{2}\,log.\,2.) =$$

0, 0002475 *ped.* ſeu, 0, 000297 *poll.* & quoniam amplitudinem vaſis æqualem inveneram $6\frac{1}{2}$ *poll.* quadratis, intellexi quantitatem aquæ quæſitam, quæ nempe effluere debuiſſet priusquam jactus maximus oriretur, exæquare circiter partem quinquageſimam ſecundam unius pollicis cubici, ſeu, poſito guttam mediocrem ſex lineas cubicas efficere, plusquam quinque guttas. In experimento autem nullam obſervavi, cujus rei rationem eſſe ſuſpicor, quod primæ guttulæ, quamvis jam ejectæ ab aqua ſubſequente tamen etiamnum propellantur; nimis enim celeriter alteræ ſubſequuntur, quam ut primæ ab illis interea divelli poſſint. Huc autem facit, quod tempusculum à fluxus initio ad maximam expulſionem usque (quod nempe per §. 13. eſt proxime $= \frac{2n\sqrt{a}}{m\alpha}\,log.\,\frac{m\alpha}{n}$, ubi per $2\sqrt{a}$ hic intelligitur tempus, quo corpus per altitudinem dimidii pedis labitur, id eſt, circiter $\frac{2}{11}$ unius minuti ſecundi) quod inquam tempuſculum illud non ultra partem centeſimam quinquageſimam octavam unius minuti ſecundi excurrat.

Fortaſſe aliquid contribuit, quod non poſſit digitus ſat celeriter à foramine removeri. Præſertim vero huc pertinet, quod maxima pars illius aquæ, quæ ante præſentem maximam velocitatem erumpit, ita ad maximam jactum accedat, ut nulla differentia obſervari poſſit & ſic vix unica guttula notabili diſcrimine ab illo defectura fuiſſet, ſi ſe libere ab aqua ſubſequente ſeparare potuiſſet.

§. 15. Hactenus de aquis per foramina effluentibus: progrediamur nunc ad effluxum aquarum ex vaſis per conos ſeu convergentes ſeu divergentes. Quod ſi autem aquæ effluant per tubum convergentem, dictat eadem ratio à motu particularum convergente petita §. 3. pro foraminibus ſimplicibus expoſita, fore ut aquæ vena præ foramine contrahatur etiamnum ejusque particulæ accelerentur & ſic quantitas aquæ dato tempore effluentis minor ſit quam menſuræ orificii effluxus & velocitatum, nulla habita ratione ad contractionem venæ, indicant. Parva autem ſolet eſſe

esse ista contractio in tubis longioribus. In tubis divergentibus omnia fiunt modo contrario: dilatatur enim vena præ foramine; aquæ motus retardatur & major aquæ quantitas dato tempore effluit, quam sine ista dilatatione sequeretur ex observatis amplitudine orificii & velocitatibus aquæ per illud effluentis. Ex tubis denique cylindricis effluens vena aquea nec contrahitur nec dilatatur.

Probe est itaque attendendum ad has sive contractiones sive dilatationes in æstimandis quantitatibus aquæ dato tempore effluentis, quam quæstionem obiter tractabimus in fine sectionis.

Nunc autem libet examini subjicere mutationes quæ in effluxus aquarum succedunt ab initio motus. In his vero compendii causa non attendemus ad mutationes venæ; neque enim res ita est comparata ut possit experimentis satis accurate confirmari neque magni momenti hic sunt præfatæ mutationes; res autem ipsa digna est, quæ sollicite perquiratur ut ejus natura animo recte intelligi possit.

De vasis, quæ tubos habent annexos, jamjam egimus in superiori sectiones §. 31. §. 32. §. 33. & quidem paragrapho 31. æquationes dedimus generaliores, quæcunque fuerit ratio inter amplitudines vasis & tubi: sed nimis sunt perplexæ calculumque postulant admodum operosum: In paragrapho, qui hunc sequitur, hypothesin pertractavi, quæ vas ubique amplitudinis infinitæ ratione tubi facit, in qua hypothesi dixi, aquam effluere velocitate, qua ad integram altitudinem aquæ supra orificium effluxus ascendere possit; sed tamen in fine paragraphi expresse monui, *ab initio motus aquam tardius descendere, quam sic definitum fuit, nec regulam istam prius locum habere, quam superficies per spatiolum aliquod descenderit*, quæ res per se satis patet, quandoquidem non possit in instanti velocitas maxima produci à statu quietis in tubo, quamvis fiat in vase foramine simplici perforato.

Hæc ita perpendens animo concepi mutationes initiales explorare, easque ad certas mensuras reducere. Ad hoc autem minime sufficit præmemorata regula, quâ istarum mutationum initialium nulla ratio habetur, quamvis cæterum exacte vera in vase infinite amplo; omnes enim mutationes quæ statum maximæ velocitatis præcedunt, fiunt dum superficies per spatiolum infinite parvum descendunt; attamen descensus iste, si modo vas fuerit sensu

Geo-

Geometrico infinitum, non solum non fit tempore infinite parvo, prouti in casu foraminis simplicis, sed tempore infinitè magno, intereaque etiam quantitas aquæ infinita effluit, cum per foramen quantitas cæteris paribus infinite parva effluat. Hæc autem ut eruerem, opus habui aliam elicere æquationem ex æquatione generali §. 23. *sect.* 3. quam simplicissimam hanc $s = x$, posita s pro altitudine, quæ velocitati aquæ effluentis respondeat & x pro altitudine aquæ supra orificium effluxus; intelliget autem quisque rem pro instituto nostro ita esse efficiendam, ut habeatur ratio incrementorum velocitatis, quod antea non requirebatur.

§. 16. Fuerit igitur ut in paragrapho 22. *sect.* 3. cylindrus AEHB (Fig. 18.) isque censeatur infinite amplus & aqua plenus, habeatque tubum annexum FMNG finitæ amplitudinis formæ coni truncati, sive crescentis amplitudine sive decrescentis versus orificium MN, per quod aquæ effluunt: sit ut ibi altitudo initialis aquæ supra foramen MN, nempe NG + HB $= a$; altitudo superficiei aqueæ in situ CD supra MN, id est, NG + HD $= x$; longitudo tubi annexi seu NG $= b$, amplitudo orificii MN $= n$, amplitudo orificii FG $= g$, amplitudo cylindri, quæ est infinita, $= m$; sitque tandem velocitas superficiei aquæ in situ CD talis quæ conveniat altitudini v, quæ altitudo utique infinite parva erit. His positis vidimus loco citato obtinere generaliter hanc æquationem:

$$m(x-b)\,dv + \frac{bmm}{\sqrt{gn}}\,dv - \frac{m^3}{nn}\,v\,dx + mv\,dx = -mx\,dx$$

in quâ patet, posse nunc negligi terminum primum $m(x-b)\,dv$ præ secundo $\frac{bmm}{\sqrt{gn}}\,dv$, ut & quartum $mv\,dx$ præ tertio $-\frac{m^3}{nn}\,v\,dx$, atque sic assumi

$$\frac{bmm}{\sqrt{gn}}\,dv - \frac{m^3 v}{nn}\,dx = -mx\,dx.$$

in qua æquatione si rursus negligatur primus terminus, quod fieri potest, nisi mutationes etiam desiderentur, quæ durante primo descensu, etsi infinite parvo fiunt, orietur regula vulgaris *ascensus potentialis* aquæ effluentis ad altitudinem integram aquæ: nunc vero pro nostro negotio, quo mutationes illas primas desideramus, terminus iste retinendus erit, atque sic æquatio ultima in tota sua extensione pertractanda.

Ponatur autem pro ſeparandis ab invicem indeterminatis $\frac{mm}{nn}v - x = s$, ſive

$$v = \frac{nn}{mm}(s + x),\ \text{atque}\ dv = \frac{nn}{mm}(ds + dx)\ \text{ſicque fiet}$$

$$dx = \frac{-nnbds}{nnb - ms\sqrt{gn}},$$

quæ ita eſt integranda, ut facta $x = a$, prodeat $v = o$, hincque $s = -a$, ita vero fit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}}\log.\frac{nnb - ms\sqrt{gn}}{nnb + ma\sqrt{gn}}$$

& poſito pro s valore ejus aſſumto $\frac{mm}{nn}v - x$, prodit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}}\log.\frac{n^4b - m^3v\sqrt{gn} + mnnx\sqrt{gn}}{n^4b + mnna\sqrt{gn}}$$

Hic rurſus in quantitate ſigno logarithmicali involuta poteſt ex numeratore eliminari terminus n^4b, infinities nempe minor termino $mnnx\sqrt{gn}$ nec non ex denominatore terminus n^4b infinities pariter minor altero $mnna\sqrt{gn}$. Et ſic fit

$$x - a = \frac{nnb}{m\sqrt{gn}}\log.\frac{nnx - mma}{nna}$$

Inde habetur, poſito c pro numero cujus logarithmus eſt unitas:

$$v = \frac{nnx}{mm} - \frac{nna}{mm} \times c^{\frac{m.(x-a)\sqrt{gn}}{nnb}}$$

aut poſita $a - x = z$, ſic ut z denotet ſpatium, per quod ſuperficies aquæ jam deſcendit, poterit æquationi hæc conciliari forma:

$$v = \frac{nn.(a-z)}{mm} - \frac{nna}{mm} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}}$$

de qua iterum liquet quod cum z vel minimam habuerit rationem ad b, fiat denominator alterius termini infinitus & $v = \frac{nn.(a-z)}{mm} = \frac{nnx}{mm}$: at vero aliter ſe res habet, quamdiu deſcenſus z infinite parvus eſt, quem caſum nunc conſideramus.

§. 17. Hiſce præmiſſis facile nunc eſt definire per quantulum ſpatium deſcendat fluidum, dum maximam velocitatem acquirit, faciendo nempe $dv = o$,

$$dv = 0, \text{ five } -\frac{nndz}{mm} + \frac{na}{mb}\sqrt{\frac{g}{n}} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}} = 0, \text{ id eft,}$$

$$z = \frac{nb}{m}\sqrt{\frac{n}{g}}, \times log.\left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right)$$

Hæc autem altitudo multiplicata per altitudinem cylindri m dat quantitatem aquæ interea effluentis, nempe $nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times log.\left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}},\right)$ quæ quantitas, ut fupra §. 15. præmonui, eft infinita, quamvis tantum logarithmicaliter, cujusmodi infinitum minus eft, quam radix cujuscunque dimenfionis datæ ex eodem infinito; eft fcilicet $log. \infty$ minor quam $\infty^{\frac{1}{n}}$, quantuscunque fuerit numerus n affignabilis. Atque hoc ideo moneo, ut fic intelligatur, qui fiat, ut, fi à vero infinito ratiocinamur ad quantitates valde magnas, quantitas ifta aquæ fat parva evadat. Cæterum corollaria formulæ hæc funt.

(I) Si tubus annexus eft cylindricus, fit $z = \frac{nb}{m} log. \frac{ma}{nb}$:
Igitur cæteris paribus hæc quantitas fe habet, ut longitudo tubi annexi, quod generaliter etiam verum eft: nam à mutato valore ipfius b cenfenda eft non mutari quantitas $log. \frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}$ ob valorem infinitum numeri $\frac{m}{n}$.

(II) Pro eodem orificio g cæterisque etiam paribus, fequitur quantitas z fesquiplicatam rationem orificii extremi: atque fi idem tubus modo orificio ftrictiori modo ampliori vafi applicetur, erit quantitas aquæ in cafu priori ad fimilem quantitatem in pofteriori, ut quadratum orificii amplioris, ad quadratum orificii minoris.

(III) Denique obfervandum eft valere totum ratiocinium pro omnibus directionibus tubi, quod quivis perfpiciet qui §. 22. *fect.* 3. recte examinabit. Poterit igitur tubus adhiberi etiam horizontalis aut fub quâcunque alia directione & utcunque incurvus, ad quod præfertim in inftituendis experimentis animus erit advertendus. Semper autem intelligetur per b longitudo tubi, per a vero altitudo aquæ verticalis fupra orificium extremum.

§. 18. Venio nunc ad tempus, quo iftæ mutationes à quiete ad maximam

ximam velocitatem fiunt: Dico autem poſſe in calculo hujusmodi temporum ſimpliciter poni $v = \frac{nn}{mm}a$; Reliquæ enim quantitates in æquatione ultima §. 16. evaneſcunt, quantumlibet parva ſumatur altitudo z, modo habeat rationem vel minimam aſſignabilem ad altitudinem illam infinite parvam, quæ reſpondet maximæ velocitati, nempe ad $\frac{nb}{m}\sqrt{\frac{n}{g}} \times log.\left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right)$. Sequitur exinde eſſe prædictum tempus, quod vocabo

$$t = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{ga}} \times log.\left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right)$$

& proinde infinitum, quamvis idem tempus admodum exiguum ſit, quum amplitudo vaſis non eſt infinita, ſed utcunque magna, quod rurſus ex natura infiniti logarithmicalis eſt deducendum.

§. 19. Quia altitudo velocitatis, ut vidimus in proximo paragrapho, poteſt ſtatim cenſeri $= \frac{nn}{mm}a$, id eſt, æqualis maximæ, cum ſuperficies per minimam partem aſſignabilem deſcenſus infinite parvi, poſt quem velocitas maxima plena adeſt, deſcendit, ſequitur mutationes plerasque à quiete usque ad ſtatum maximæ velocitatis eſſe inſenſibiles, id eſt, infinite parvas, imo non ſolum plerasque, ſed & omnes præter particulam infinite parvam: res ſcilicet ſic ſe habet: velocitas à primo initio plane nulla eſt, & poſtquam aqua per ſpatiolum infinite parvum deſcendit, jam eſt tantum non maxima; dein dum per aliud ſpatiolum rurſus quidem infinite parvum priori tamen infinite majus, deſcendit, pergit velocitate ſua moveri, incrementa ſumens infinitè parva, & tunc demum vere maximam velocitatem attingit: Cum vero poſteriores illæ mutationes ceu infinite parvæ non poſſint ſenſibus percipi, aliter pertractabimus ea quæ à §. 17. dedimus theoremata, conſiderando loco mutationum à quiete usque ad punctum maximæ velocitatis, easdem mutationes usque ad datum gradum velocitatis.

§. 20. Indagabimus itaque, per quantum ſpatiolum z ſuperficies aquæ à ſtatu quietis deſcendere, quantaque aqua effluere, ac denique quantum tempus præterire debeat, ut aqua interna velocitate moveatur, quæ generetur lapſu libero per datam altitudinem, quam vocabimus $\frac{nn}{mm}e$, ita ut ipſa e denotet ſimilem altitudinem pro velocitate aquæ effluentis. Ad hoc requiquiritur, ut in æquatione ultimâ paragraphi decimi ſexti ponatur $\frac{nne}{mm}$ pro v, ſic autem erit

$$\frac{nne}{mm} = \frac{nn(a-z)}{mm} - \frac{nna}{mm} : c^{\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}}$$

hincque deducitur $\frac{mz}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}} = log. \frac{a}{a-e-z}$; hic vero cum e ponatur deficere notabiliter ab a poteſt rejici littera z ſigno logarithmicali involuta, unde obtinetur

$$z = \frac{nb}{m}\sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e}$$

Hæc vero æquatio jam indicat ſpatiolum, quod eſt infinite parvum, & per quod deſcendit ſuperficies aquæ, dum à quiete velocitas aquæ effluentis tanta ſit, quæ debeatur altitudini e; ſeque habet hoc ſpatiolum ad illud paragrapho decimo ſeptimo indicatum, quo nempe velocitas maxima oritur, ut $log. \frac{a}{a-e}$ ad $log. \left(\frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{g}{n}}\right)$ ita ut primum ſit infinities minus altero, etſi pariter infinite parvo.

Si porro definita quantitas z multiplicetur per m, obtinetur quantitas aquæ effluentis dum illa velocitas altitudini e debita producitur, quæ proin quantitas eſt æqualis

$$nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e}$$

atque ſic finitæ magnitudinis, & quidem eo majoris, quo longior ſumitur tubus, & quo major jactus expectatur.

Denique tempus, quo idem fit, ſi recte ſeligantur termini rejiciendi, reperitur æquale

$$2\sqrt{\left(\frac{nbb}{ag}\; log. \frac{a}{a-e}\right)}$$

atque ſic finitum ſed admodum parvum & in nullo exemplo ultra minutum ſecundum facile extendendum.

§. 21. Hæc omnia accurate examinare ac proſequi volui, tum quod multorum phænomenorum, quæ in effluxu aquarum obſervari ſolent, ſolutio inde pendeat, tum etiam ut illas mutationes, quæ ſenſibus plane ſunt imperceptibiles, animo recte aſſequeremur. Multi fuerunt, qui tranſitus ab infini-

 to

to ad finitum aut viciſſim à finito ad infinitum in aquis fluentibus non recte aſſecuti à plurimis difficultatibus ſe extricare non potuerunt, quæ aliàs facilè admittunt ſolutionem, ſi autem loco vaſis fere infiniti, cujuſmodi nulla ſunt, ſumatur vas valde amplum, aut etiam quod in multis caſibus ſufficit, mediocriter amplum, erunt formulæ proxime veræ, & modo magis modo minus ad verum accedent pro indole quæſtionis: de his quædam monebo in ſequentibus experimentis. Interim ſic ſatis jam apparet ex theoria, quod potiſſimum explicare conſtitueram, cur aqua ex vaſe ampliſſimo ſimplici omni ſtatim velocitate effluat, & cur ſecus ſit de aquis ex vaſe per tubum ejectis: Menſuræ vero præciſæ de his quæſtionibus ex æquationibus ipſis erunt deducendæ.

§. 22. Tandem quod pertinet ad tempus depletionis, patet cum amplitudo vaſis vel mediocriter ſuperat amplitudinem tubi annexi, poſſe ſine ſenſibili errore cenſeri illud $= \frac{mn}{n}\theta$ intelligendo per θ tempus, quo corpus à quiete libere cadendo abſolvit altitudinem, quam aqua ab initio fluxus habuit ſupra orificium tubi extremum, atque ſumendo pro $\frac{mn}{n}$ rationem quæ eſt inter amplitudinem vaſis & *ſectionem venæ*, ſive *contractam* ſive *dilatatam*. Impedimenta vero, quæ in his caſibus fortuito ſuperveniunt, tempus iſtud admodum augent. Si vero tempus deſideretur, quo ſuperficies aquæ per datam deſcendat altitudinem erit illud ſumendum $= \frac{mn}{n}(\theta - T)$ ſumto pro T tempore quod corpus inſumit libere cadendo per altitudinem, quam aqua in fine fluxus ſupra foramen habet.

Experimenta quæ ad Sect. IV. pertinent.

QUum magna pars hujus ſectionis poſita ſit in contractione venæ aqueæ per foramen in lamina tenui factum fluentis, animo concepi de iſta contractione experimenta inſtituere accurata, non quidem menſuras accipiendo diametrorum, quam methodum non ſufficienti accuratione fieri poſſe expertus ſum, ſed obſervando velocitates *actuales* ex amplitudine jactus, & quantitates datis temporibus effluentes; In experimentis automato uſus ſum, quod tempore unius minuti primi 144. vicibus pulſabat, atque ſic ſequentia ſumſi.

Ad

Ad Theoriam Contractionis Venarum aquearum

Experimentum I.

Tubum cylindricum adhibui, cujus diameter erat 4. *poll.* 3. *lin. mens.* Angl. è lamina tenui factum quique foramen habebat in latere, id est, in superficie cylindrica: erat diameter foraminis $= 4\frac{52}{125}$ lin. aquæ effluebant horizontaliter ex cylindro verticaliter posito, & fuit ab initio fluxus altitudo aquæ supra centrum foraminis = 4. *poll.* 8. *lin.* similisque altitudo in fine fluxus = 3. *poll.* duravit autem omnis fluxus intervallo undecim automati pulsuum, quæ proxime efficiunt tempus 4. minutorum secundorum cum dimidio.

Porro repetito sæpius experimento observatisque tum altitudine foraminis supra tabulam horizontaliter positam, tum amplitudine jactus, hacque tam in principio quam in fine fluxus, vidi ex *Lemm. in principio Experimentorum præcedentis Sect. indicato* velocitatem aquæ effluentis in loco venæ maxime contractæ constanter talem fuisse, quantum quidem sensibus dijudicari potuit, quæ deberetur altitudini aquæ supra eundem locum, qui in eadem altitudine est quâ foramen.

Igitur si contractionem venæ aqueæ ubique eandem fuisse ponamus & huic casui applicemus æquationem ultimam paragraphi decimi tertii, nempe $t = \frac{2m\alpha}{n}(\sqrt{a} - \sqrt{c})$ erit ponendum $t = 4\frac{1}{2}$ *min. sec.* $\frac{m}{n} = 133$; $2\sqrt{a}$ (= tempori quod corpus insumit libere cadendo per altitudinem aquæ initialem) = 0, 1483 & $2\sqrt{c}$ (= tempori simili pro altitudine aquæ ultima) = 0, 1146 : fit $4\frac{1}{2} = 3, 15\,\alpha$; unde $\alpha = 1, 43$. Exinde consequens est, amplitudinem foraminis fuisse ad sectionem venæ contractæ ut 143. ad 100; hæc ratio tantillo major est quam quæ intercedit inter $\sqrt{2}$ & 1 nempe inter 141 & 100; sed si accuratissime velocitates observari potuissent, dubium non est, quin illæ paullo minores futuræ fuissent, quam quæ toti altitudini aquæ debeantur; & cum hujus rei ratio habetur, deprehenditur valorem ipsius α sic pauxillum diminuendum esse; potest igitur ex toto experimento colligi tutissime rationem præmemoratam fuisse ut $\sqrt{2}$ ad 1.

Expe-

Experimentum 2.

Deinde experimento explorare volui, an in omnibus jactibus ſub quacunque directione contractio eadem ſit, & hunc in finem exiſtimavi rem ſic eſſe aggrediendam, ut præter directionis illius mutationem circumſtantiæ cæteræ omnes eſſent prorſus ſimiles. Id vero ſic obtinui.

Eodem ſcilicet, quo antea cylindro uſus ſum, eum autem arcæ priſmaticæ verticaliter poſitæ implantavi, ita, ut axis cylindri eſſet horizontalis, ſicque implantatum circumverti, ut centrum foraminis, aquarum effluxui deſtinati, modo locum ſummum, modo medium, modo imum occuparet: in primo caſu aquæ verticaliter ſurſum effluebant, in ſecundo horizontaliter, in tertio verticaliter deorſum ejiciebantur; in ſingulis vero feci ut altitudines aquæ in arca ſupra centrum foraminis eſſent perfecte æquales: ſucceſſus hic fuit.

Obſervavi æqualibus temporibus ſuperficiem aquæ in ſingulis caſibus per ſpatia æqualia in arca deſcendere. Igitur in venis ſurſum projectis aqua ſuperior non reſiſtit ſenſibiliter aquæ inferiori ſubſequenti, quod idem alio intellexi modo, quod ſcilicet, ſi ad parvam à foramine diſtantiam veluti 3. linearum nummo aliquo venam aqueam cujuſcunque directionis excipiebam, ita ut vena in nummum perpendiculariter incideret, effluxus aquarum non fuerit retardatus. Porro nec aqua in venis verticaliter deſcendentibus anterior poſteriorem poſt ſe trahit; ipſaque venæ contractio ſimilis ubique eſt, non conſiderata retardatione accelerationeque aquarum ſurſum vel deorſum ejectarum, quæ faciunt ut vena in aliqua à foramine diſtantia vel intumeſcat, vel gracileſcat. Hic enim ſermo eſt de illa modo contractione, quæ oritur à motu particularum obliquo in regione foraminis.

Experimentum 3.

Eadem machina prædicto modo præparata uſus ſum ad explorandum, num contractio venæ cæteris paribus mutaretur ab aucta altitudine aquæ ſupra foramen. Hunc in finem duas acus infixi lateribus internis arcæ ad perpendiculum ſibi reſpondentes, prior eminebat ſupra centrum foraminis 13 *poll.* cum 10. *lineis*, altera 12. *poll.* $1\frac{3}{5}$ *lin. menſ. Angl.* amplitudo arcæ erat ad amplitudinem foraminis ut 404. ad 1, vidi autem ſuperficiem aquæ à ſuperiore acu

acu ad inferiorem descendisse post intervalla 24. automati pulsuum, quæ faciunt tempus 10. minutorum secundorum.

Quod si vero tempus idem quæratur ad Hypothesin, venam se nihil contraxisse, simulque aquas omni velocitate, quam vi theoriæ nullo præsente impedimento alieno habere debuissent, effluxisse, reperitur illud $= 6\frac{7}{8}$ *min. sec.*

Sic igitur concludi potest, fuisse amplitudinem foraminis ad *sectionem venæ contractæ* ut 10. ad $6\frac{7}{8}$, id est, $\alpha = 1, 45$, cum in primo experimento fuerit pro eodem foramine perpensis omnibus circumstantiis $\alpha = 1, 41$.

Postquam hæc ita expertus fuissem, residuum erat explorare, an aquæ omni velocitate ad sensus effluxerint, qua de re eo magis dubitavi, quod crescentibus velocitatibus aquæ, crescant simul impedimenta, hæcque proin notabilia esse possint in majoribus aquæ altitudinibus, qualia in minoribus non sunt.

Feci itaque omni adhibita cura (quod potissimum ad præcisionem experimenti requiritur) ut aquæ sub directione perfecte horizontali effluerent. & acceptis mensuris tum amplitudinis jactus, tum altitudinis foraminis supra tabulam horizontalem, vidi subducto calculo, quod cum altitudo aquæ erat $= 13$. *poll.* cum 10. *lin.* seu 166. *lin.* aquæ effluxerint, seu potius per *sectionem venæ contractam* transfluxerint, velocitate, quæ convenit altitudini $158\frac{1}{2}$ *lin.* igitur velocitas in calculo diminuenda est in ratione subduplicata harum altitudinum atque in eadem ratione proxime decrescit valor inventus litteræ α, qui ita fit paullo minor quam 1,42 seu rursus 1,41 & sic colligere licet, solam altitudinem aquæ mutatam ad sensus non mutare contractionem venæ.

Experimentum 4.

Tubum habui cylindricum altitudinis 4 *poll.* cujus sectio per axem repræsentatur per (Fig. 28. *b.*) CABD, amplitudo cylindri erat ad amplitudinem foraminis *a c* ut 110 ad 1. Cylindrus iste aqua plenus omnis evacuatus fuit tempore 21. minutorum secundorum cum dimidio. Notari autem debet, non prius aquis effluxum concedendum esse, quam nullus in illis motus turbinatorius observetur; secus enim aqua mox in turbinem vertitur, durante effluxu Fig. 28. *b* ſat celerem, effluxuſque valde retardatur, eoque magis, quo celerius aqua interna in Gyrum agitur: quia porro nunquam omnis aqua effluit, effluxus tempus conſideravi, uſquedum ſtillatim effluere inciperet.

Indicat hoc experimentum minorem hic aquæ fuiſſe contractionem quam pro ratione $\sqrt{2}$ ad 1; Expectaveram tempus evacuationis fore admodum 23. *min. ſec.* ſed eventus paullo alius fuit ut dixi, cujus rei rationem eſſe poſtmodum animadverti, quod labia foraminis elongata tubulum fere quamvis breviſſimum formarent, ut Figura oſtendit, qui venæ aqueæ contractionem impediebat: interim latitudo iſtorum labiorum duas tertias lineæ non attingebat.

Experimentum 5.

Feci ut aquæ ex vaſe ampliſſimo per tubulum effluerent horizontaliter: erat autem tubus breviſſimus, longitudinem nempe 3. *lin.* non excedens, habebatque in diametro fere 5. *lin.*

Effluxit data aquæ quantitas tempore $11\frac{1}{4}$ *min. ſec.* quæ effluere debuiſſet tempore $10\frac{2}{7}$ *min. ſec.* ſi neque contractam fuiſſe venam, neque ulla adfuiſſe impedimenta ſtatuatur.

Velocitates reales aquæ non cenſui opus eſſe ut experirer, nullus dubitans tales fuiſſe, quales eſſe debeant, ut obſervato tempore per obſervatum orificium data quantitas aquæ, nulla facta ad contractionem venæ attentione, efflueret.

Alios inſuper alius diametri longitudinisque adhibui tubulos & vidi quantitates aquæ dato tempore datisque velocitatibus effluentis recte reſpondere orficiis effluxus: velocitates autem eo magis defeciſſe à velocitate integræ altitudini aquæ debita, quo ſtrictior & quo longior erat tubus, ut & quo altior erat aqua.

Ad Theoriam aquarum per tubos effluentium.

Experimentum 6.

Vaſa, quorum ſectiones per axem repreſentant Fig. 24. & 25. cylindrica, altitudinem habebant 4. *poll. Angl.* tubosque annexos longitudinis unius pedis, amplitudines cylindrorum erant ad amplitudines orificiorum A, ut 110 ad ad 1; Orificium autem B erat ad orificium A proxime ut 25 ad 16; tempus evacuationis repletis antea cylindris fuit in Fig. 24, *sex min. sec.* cum dimidio, in altera præterpropter 4 hujusmodi minutorum cum triente.

In his casibus vasa satis ampla fuere ratione tuborum annexorum, ut veluti infinita censeri possent; debuissetque proin per Regulas passim à nobis indicatas aqua effluere per orificia extrema velocitatibus respondentibus toti altitudini aquæ, si modo excipias prima fluxus momenta, quæ ipsa tam brevia hic sunt, ut observari non possint. Et cum præterea, ut passim monui, quantitas aquæ dato tempore per tubos effluentis simpliciter æstimanda sit ex celeritatibus & magnitudine orificiorum inveni per regulam §. 12. exhibitam, tempus evacuationis in primo casu $4\frac{1}{2}$ minsec. in posteriori = fere 3. *m. sec.*

Quod in experimento majora paullo fuerint observata in Fig. 24. maximam partem adhæsioni aquæ ad latera tubi, in Fig. autem 25. alii in super rationi in paragrapho 34. *sect.* 3. indicatæ est tribuendum.

Phænomena alia in his vasis sunt notanda: nempe cum vasa sunt tantum non evacuata, percipitur sonus quidem ab aëre, qui tunc aquæ in orificio superiori se miscet. hunc vero sonum pro ultimo fluxus momento accepi: facile fit porro, ut aquæ effluxus concedatur priusquam ad perfectam quietem fuerit reducta (nam ab impletione agitantur & in turbinem moventur aquæ); tunc autem effluxus admodum retardatur & cataractæ species interne formatur, continueque aër aquæ effluenti se permiscet. Ita potest pro lubitu retardari effluxus, si in verticem aquæ agantur antequam effluant.

Experimentum 7.

Vase usus sum Prismatico, cui tubulus infixus erat horizontaliter ut in Fig. 19. Habebat orificium G F in Diametro præcise quinque lineas; alterum N M $6\frac{1}{2}$ *lin.* Erant proin ipsæ amplitudines orificiorum G F & N M ut 100. ad 169. amplitudo vero vasis continebat amplitudinem orificii N M ducentis & una vicibus. Longitudo tubuli G N erat 4. *poll.*

Denide vas aquâ implevi usque in C D, cujus altitudo supra axem tubi erat 13. *poll.* 10, *lin.* Aperto orificio N M effluxerunt aquæ descenditque

 super-

ſuperficies usque in E H tempore $8\frac{1}{4}$ *min. ſec.* erat vero altitudinum differentia C E vel D H duorum pollicum cum octo lineis.

Subducto calculo ad normam paragraphi 22. ubi neque ad impedimenta, neque ad mutationem venæ attenditur, videmus prædictum tempus deſcenſus eſſe debuiſſe proxime = 5 *min. ſec.* cum fere dimidio. Igitur ſtatuendum eſt hoc modo, velocitatem mediam totalem ſe habuiſſe ad velocitatem integram, quam theoria indicat, ut $5\frac{1}{2}$ ad $8\frac{1}{4}$ ſeu proxime ut 2 ad 3; hincque concludi poteſt, aquam per orificium M N effluxiſſe velocitate, quæ conveniat $(\frac{2}{3})^2$, ſeu quatuor nonis partibus altitudinis aquæ ſupra foramen M N, per alterum vero orificium G F transfluxiſſe velocitate quinque præter propter quartis ejusdem altitudinis partibus debita.

Apparet itaque rurſus effluxum aquarum promoveri ab auctâ amplitudine orificii tubi verſus exteriora, quamvis nec orificium quo tubus in vas eſt implantatus, nec ſitus tubi ſit mutatus.

Porro in tabula horizontaliter poſita P Q obſervavi amplitudinem jactus P Q pro altitudine *o* P, quæ erat 4. *poll.* 8. *lin.* Inveni autem P Q = 9. *poll.* 6. *lin.*

Sequitur ex iſta obſervatione, quod ſi dilatationis venæ conſideratione ſepoſita aquæ in N M velocitatem debuerint habere, qualis debetur altitudini 4. *poll.* 10. *lin.* cum tamen vi præmiſſi experimenti certe habuerit velocitatem debitam altitudini fere 6. *poll.* 2. *lin.* Confirmat hæc obſervatio id quod §. 15. dixi, nempe in tubis divergentibus venam aqueam dilatari veluti in *m*, ipſiusque motum retardari. In præſenti vero caſu, ut ambæ obſervationes concilientur, dicendum erit venam ita dilatatam fuiſſe, ut amplitudinem haberet ratione orificii N M reciproce ut prædictæ velocitates ſeu reciproce ut radices altitudinum iſtis velocitatibus debitarum, nempe ut $\sqrt{74}$ ad $\sqrt{58}$. proindeque diametros venæ dilatatæ & orificii fuiſſe ut $\sqrt[4]{74}$ ad $\sqrt[4]{58}$. ſeu ut 100 ad 941.

Experimentum 8.

Aliud feci experimentum quod, quamvis huc nondum pertineat, nihilominus recenſebo: nempe in ortu prope orificium G F tubum perforavi foramine *e* duarum fere linearum, rurſusque deſcenſum ſuperficiei ex C D in

E H

EH obfervavi effluente aqua per NM, fimulque amplitudinem jactus examinavi.

Duo hæc vidi, quæ prima fronte fibi contradicere fere videntur; defcenfus ex CD in EH tardior factus eft quam in præcedenti experimento fuerat, & nunc duravit 10. *min. fec.* & tamen amplior fuit jactus PQ pro eadem altitudine *o* P; jam enim erat PQ = 10. *poll.* 10. *lin.*

Ambo Phænomena ita explico: ob foramen *e*, quod fuit factum prope GF quodque aëri liberum tranfitum concedit, folvitur nexus, quem alias inter fe habent aquæ in tubo, nec proin aliter transfluunt aquæ ubi eft foraminulum *e*, quam fi eo ipfo in loco effet refciffus tubus; fluerent autem tardius, quod paffim demonftravi, fi tubus GNMF ceu divergens brevior fieret. Quod porro aquæ quamvis minori quantitate, tamen majori impetu per orificium NM non mutatum fluere poffint fine implicita contradictione, ratio eft permixtio aëris cum aqua; nam aër perpetuo irruit in tubum per foraminulum *e* & una cum aqua effluit per NM. Denique phænomenon illud, quod aquæ actu celerius fluant per MN aperto, quam claufo foramine *e*, aliter explicari non poffe mihi videtur, quam quod impedimenta extrinfeca minus agant in aquam aëre rarefactam quam naturalem.

Ad theoriam aquarum, quæ ex vafis ampliffimis à puncto quietis usque ad datum velocitatis gradum effluunt.

Experimentum 9.

Quum aquæ per foramen in lamina tenui factum ex vafe ampliffimo effluunt, prima ftatim guttula omni velocitate, quæ altitudini aquæ fupra foramen debetur, erumpit.

Conforme hoc eft cum theoria §. 11. indicata, fi vas fit revera infinitum, & quamvis etiam non fuerit fenfu Geometrico infinitum, dummodo fit valde amplum, nulla pariter guttula ab initio fluxus obfervari poteft, quæ non maxima velocitate effluxerit: Phænomenon hoc explicui §. 14. cum nempe vi theoriæ in cafu particulari aliquo ibidem recenfito vix una aut duæ guttulæ fenfibiliter à jactu maximo deficere debuiffent, ſent, dixi non poſſe tantillam aquæ quantitatem ſe ab aqua ſubſequente ſeparare ob mutuam aquearum particularum attractionem ſeu adhæſionem.

Experimentum 10.

Quum vero aquæ ex vaſe ampliſſimo per tubum vaſi horizontaliter inſertum effluebant, obſervavi priusquam vena effluens jactum formaret, maximum *om* Q (vid. Fig. 19,) ſat notabilem aquæ quantitatem in tabulam horizontalem ſubjectam delabi mediam inter P. & Q. eo majorem eſſe hanc quantitatem quo longior eſt tubus G N & quo magis verſus N divergit, ac denique inæqualiter aquam illam diſtribui, multo copioſius ſcilicet decidere in locum, qui eſt remotior à puncto P, quam qui eidem eſt propior; Ratione autem temporis, quo omnes iſtæ mutationes fiunt, vidi illud breviſſimum eſſe, & tale ut ejus menſura percipi non poſſet.

Omnia iſta phænomena ex aſſe ſatisfaciunt propoſitionibus, quas dedimus à paragrapho undecimo usque ad finem ſectionis. Menſuræ autem ibidem exhibitæ experimentis recte confirmari non poſſunt, præſertim illæ, quæ §. §. 15. 16. & 17. indicatæ ſunt, ubi ſcilicet formulæ communicantur, quæ exprimant quantitatem aquæ effluentis, dum à quiete maximus fit jactus: ratio eſt primò, quod primæ guttulæ quæ prope punctum P in tabulam decidere deberent ab aqua ſubſequente non libere ſe ſeparent; ſecundo, quod aquæ quantitas venæ O Q proxima (quæ quidem maximam vi ipſius theoriæ partem conſtituit) intercipi non queat, & denique, quod motus aquarum per tubos admodum tetardari ſolet, ab impedimentis extrinſecis, imprimis ſi tubi divergant, atque ſic motus realis ſit admodum diverſus à motu quem aquæ habituræ eſſent, remotis omnibus impedimentis. Reliquæ menſuræ à nobis indicatæ paucioribus iisque minoris momenti difficultatibus ſunt ſubjectæ; continentur autem §. 20. & exprimunt potiſſimum aquæ quantitatem, quæ à primo motus puncto effluit, dum aqua datum velocitatis gradum attingit.

Quamvis ob rationes modo dictas, præſertim in caſu tuborum divergentium perfectus conſenſus theoriæ cum experimentis minime expectari poſſit, talem tamen expertus ſui ſucceſſum, ut facile intellexerim integrum futurum fuiſſe conſenſum ſi impedimenta omnia una cum aquearum particulacularum mutua adhæſione præveniri potuiſſent. Experimenta autem ſumſi tum de tubo divergente, tum de cylindrico : ſingula nunc exponam :

Experimentum II.

In Figuræ 19. tubus formâ coni truncati horizontaliter vaſi erat in ſertus, vas ipſum aqua implevi usque in C D, ita, ut altitudo ejus ſupra axem tubi eſſet æqualis 433. particulis æqualibus, quibus in toto experimento uſus ſum. Pro illa altitudine experimento inquiſivi in punctum Q maximo jactui reſpondens, & fuit P Q = 287. *part.* dum altitudo *o* P erat = 146. *part.* Sic vidi motum aquæ tum propter aquæ adhæſionem, tum propter Figuram tubi fuiſſe valde retardatum, quod in his caſibus fieri debere aliquoties monui. Debuiſſet autem, ſi nihil obſtitiſſet motui, eſſe P Q = 503. *part.*

Deinde Patinam poſui in tabulam horizontalem, cujus ora erant in S & R : Patinam autem prius madefeci, omnemque aquam ex illa depluere rurſus ſivi: ſumtaque menſura P R, illam inveni 206 *part.*

Denique diameter G F erat = 13. *part* & M N = 17 *part.* longitudo tubi autem erat = 125 *part.*

His omnibus ita præparatis, dum orificium M N digito obturarem, remoto confeſtim digito aquæ ejiciebantur, earumque pars aliqua in patinam decidebat: hanc ſollicite in tubum vitreum collegi cylindricum, cujus diameter erat = $8\frac{1}{2}$ *part.* tubus iſte impletus fuit ad altitudinem 210 *part.* fuit igitur quantitas aquæ in patinam delapſæ = 11922 *particulis cubicis.*

Jam vero deberet iſta quantitas per §. 20. eſſe $= nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a-e}$, ubi per n intelligitur amplitudo orificii N M ſeu 227. *part. quadrata* per g amplitudo orificii G F = 133. *part. quadr.* denotat porro b longitudinem tubi, quæ fuit = 125 *part.* per a proprie intelligitur altitudo ſuperficiei C D, ſupra axem tubi, hic vero intelligenda potius eſt altitudo conveniens velocitati aquæ in punctum Q incidentis, ſeu 141. *part.* ſimiliterque pro e ſumenda eſt altitudo conveniens velocitati particulæ in punctum R incidentis, nempe 73 *part.* Denique vox abbreviata *log.* ſignificat logarithmum Hyperbolicum. Factis iſtis ſubſtitutionibus numericis, fit

$$nb\sqrt{\frac{n}{g}} \times \log. \frac{a}{a-e} = 227 \times 125 \times \frac{17}{13} \times \log. \frac{141}{68} = 26830.$$

Fuit

Fuit igitur quantitas aquæ experimento inventa ad quantitatem, quam theoria ſepoſita impedimentorum conſideratione indicat, ut 11922 ad 16830; qui numeri, quamvis non parum differant, tamen egregie theoriam confirmant, quod ipſum nunc clare ob oculos ponam.

In formula $nb \sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e}$, poſuimus pro a altitudinem velocitati maximæ aquæ effluentis debitam, qualis revera fuit in experimento, non qualis remotis obſtaculis futura fuiſſet; fecimus nempe $a = 141$: in theoria vero eſt $a = 433$. Quod ſi autem valor iſte poſterior aſſumatur, retinendo valorem altitudinis $e = 73$, fit $nb \sqrt{\frac{n}{g}}\, log. \frac{a}{a-e}$ proxime $= 6700$, qui numerus nunc multo minor eſt numero per experimentum eruto, cum antea fuerit admodum major. Talis autem fit cum altitudo e ſervare valorem ponitur. Verum prouti altitudo a aucta fuit ab 141 uſque ad 433, ita certe etiam altitudo e eſt augenda, foretque utraque altitudo in eadem ratione augenda, ſi impedimenta primis guttulis æqualiter reſiſterent & ſequentibus: ſed minorem reſiſtentiam offendunt cæteris paribus particulæ, quo tardius moventur, atque proin etiam guttulæ quæ cadunt cis terminum R minus retardantur, quam quæ terminum iſtum tranſgrediuntur: Facile eſt exinde colligere in minori ratione augendam eſſe altitudinem e quam alteram a, ipſam vero rationem dicere non poſſumus, niſi à poſteriori, faciendo ſcilicet, ut theoria conveniat cum experimento; ita reperitur ponendum eſſe $e = 120$, qui numerus animo ad omnes circumſtantias bene attento plane ſatisfacit.

Sic igitur manifeſtum mihi videtur, experimenti ſucceſſum talem fuiſſe, ut plane cum theoria conveniat. Hujusmodi autem exempla omnino demonſtrant, veras motuum leges in fluidis nos tradidiſſe, eaque inter infinita alia ſelegi, quod nullam habent nexum neque affinitatem cum regula communi, quæ fluida ubique velocitate effluere ſtatuit, toti altitudini aquæ ſupra foramen debita, neque poſſint principiis conſuetis ſolvi. Cæterum quoniam in hoc experimento motus aquæ retardatus fuit, aliud inſtituere volui, quo omnia impedimenta admodum diminuerentur, ut ſic appareret eo magis ad ſe invicem accedere numeros experimenti & regulæ, quo minora eſſent impedimenta.

Experimentum 12.

Jam itaque uſus fui tubo cylindrico per quem facilior fit transfluxus eoque ob eandem rationem ampliore: erat præterea arca cui tubus infertus fuit multo amplior, & denique altitudo aquæ in arca contentæ ſupra axem tubi multo minor fuit, ut minori velocitate aquæ transfluerent, ſicque obſtacula minoris momenti offenderent: Cætera fuerunt, ut ante.

Fuit igitur altitudo aquæ ſupra axem tubi $= 130$. *part.* P $= 553$. *part.* PQ $= 453$. *part.* PR $= 297$. diameter GF vel MN $= 19$. *part.* tubique longitudo 130. *part.*

Vidi aquam in patinam delapſam cylindrum explevifſe, qui $8\frac{1}{2}$ *part.* in diametro continebat ad altitudinem 281. *part.* & cujus proinde capacitas erat 15950. *part. cub.* In hoc caſu ponendum eſt $a = \frac{453 \cdot 453}{4 \cdot 553} = 93$. *part.* $e = 40$. *part.* $n = g = 284$. *particulis quadratis* & $b = 130$. His vero factis ſubſtitutionibus fit

$$n b \sqrt{\frac{n}{g}} \times log. \frac{a}{a-e} = 284 . 130 . log. \frac{93}{53} = 20760,$$

cui numerus in experimento reſpondet, ut vidimus, 15950. Hic vero numerus fere quatuor quintas alterius explet, ſicque eidem proxime accedit, cum in præcedenti exemplo ob rationes allatas ſimilis numerus à ſimili plus quam dimidio defecerit,

Jam igitur abunde patet, ſolis obſtaculis extrinſecis attribuendum eſſe, quod experimenta non ad amuſſim reſpondeant formulis; interim tamen talia eſſe, ut non poſſint melius harum formularum robur demonſtrare.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO QUINTA.
De motu aquarum ex vasis constanter plenis.

§. I.

VAsa plena servantur, cum continue totidem affunduntur aquæ, quot effluunt; affusio autem esse potest vel in eadem cum motus superficiei aqueæ directione eademque singulis momentis velocitate, quasi scilicet nova continue crearetur superficies, cui velocitas aquæ proximæ jam insit, vel lateralis & sine impetu, veluti si superficies, quæ continue nova creari fingitur, nullo motu prædita sit & demum ab aqua inferiore ad motum cienda. Reliquos affundendi novas aquas, qui infiniti sunt, modos præteribo.

Regula interim circa hunc motum, præsertim posteriorem, recepta est, aquam effluere velocitate conveniente altitudini superficiei supra lumen: facile tamen est prævidere illam valere non posse, nisi pro vase ubique infinite amplo, in reliquis autem fore, ut motus à quiete incipiens sensim sensimque per aliqua temporis intervalla augeatur, & post infinitum demum tempus omnem velocitatem acquirat. Attamen, si dicendum, quod res est, fiunt istæ accelerationes plerunque tam celeriter, ut minimo tempusculo tantum non tota velocitas adsit: Verum res secus se habet in prælongis aquæ ductibus, in quibus velocitatum augmenta oculos non effugiunt & cum distinctis mensuris observari possunt.

Quicquid autem ejus rei sit, cum nullibi displicere possit accuratio mathematica, constitui motum aquarum à principio ad quemvis datum terminum considerare & prosequi.

§. 2. Omnes hujus motus proprietates ad tres præcipue æquationes se reduci patiuntur 1°. inter quantitatem aquæ ejectæ respondentisque velocitatis; 2°. inter tempus & velocitatem & 3°. inter quantitatem aquæ & tempus. Harum æquationum si una habeatur reliquæ inde sua sponte fluunt.

Primam

Primam igitur ſolam accuratius ſcrutabimur: Hic vero memores ſimus eorum, quæ in præcedente ſectione monita fuerunt circa contractionem venæ per ſimplicia orificia, aut tubos convergentes effluentis, & dilatationem ejuſdem, cum per tubos divergentes ejicitur. Indicavimus autem §. 3. *Art.* 1. *Sect.* IV. eò uſque venam conſiderandam eſſe, donec particularum velocitates (abſtrahendo animum à mutationibus quas gravitas in particulis extra vas producit) amplius non mutentur, & omnem illam venæ partem ceu intra vas motam æſtimandam eſſe, quaſi ſcilicet ſuperficies venæ eouſque indureſcat. Igitur deinceps cum de vaſe per quod aquæ effluunt ſermo erit, ſubintelligendum erit vas illud ideale, cujus orificium effluxus ſit ſectio venæ nulli deinceps mutationi ſubjectæ, niſi quæ deſcenſui vel aſcenſui venæ debetur.

Problema.

§. 5. Invenire velocitatem aquæ effluentis ex vaſe conſtanter pleno, poſtquam jam data aquæ quantitas effluxit.

Solutio.

Duo ſunt modi affundendæ aquæ præcipue conſideratu digni, quorum quivis aliam poſtulat problematis ſolutionem: vel enim aqua verticaliter in vas depluere ponitur & ita quidem, ut eâdem præciſe affluat velocitate, quam habet aquæ ſuperficies, vel lateraliter affluit aqua, ſicque caret impetu, quo ſua ſponte aquæ ſuperficiem inſequi poſſit & in motum demum eſt cienda.

Caſus I.

Ut pro primo caſu æquationem inveniamus inter quantitatem aquæ ejectæ, velocitatemque reſpondentem, iiſdem unica mutata circumſtantia veſtigiis inſiſtendum erit, quæ in primis paragraphis ſectionis tertiæ ſecuti ſumus.

Sit igitur ut in §. 6. *Sect.* 3. vas propoſitum $aimb$ (Fig. 15. & 16.) quod affuſione aquarum conſtanter plenum ſervatur uſque in cd; effluant autem aquæ per foramen pl; ponaturque eam aquæ quantitatem jam effluxiſſe, quæ contineri poſſit in cylindro ſuper foramine pl erecto altitudinis x, ultimam autem guttulam effluxiſſe velocitate, qua aſcendere poſſit ad altitudinem qs ſeu v; ſic jam exhibenda erit æquatio inter x & v.

Sit curva C G I ſcala amplitudinum, talis nempe, ut, denotante H L

 alti-

altitudinem fupra foramen, exprimat H G amplitudinem vafis in illo loco. Deinde fiat tertia curva *t r u*, cujus applicata H *r* fit ubique æqualis tertiæ continue proportionali ad GH & PL feu cujus applicata H*r* fit $= PL^2 : GH$.

Dicatur fpatium DCIL $=$ M, fpatium D*t u*L $=$ N, & erit *afcenfus potentialis* aquæ in vafe contentæ, poftquam prædicta quantitas jam effluxit (per §. 2. *fect.* 3.) $= \frac{N}{M} v$. Effluere porro intelligatur particula *p l o n*, fuperficiesque *c d* defcendere in *e f*, erit jam velocitatis altitudo pro particula *p l o n* $= v + dv$; atque fi nunc conftruatur parallelogrammum L*xy*O, cujus latus L O fit $= lo$ & alterum L*x* $=$ PL, erit *afcenfus potentialis* ejusdem aquæ in fitu *efmlonpie* æqualis tertiæ proportionali ad fpatium EFLONPIE, (quod rurfus eft $=$ M, quia PLON exprimit magnitudinem guttulæ *plon*, dum CDFE exprimit quantitatem minimam *cdfe* ifti guttulæ æqualem) fpatium *w u x y* OLF (quod eft $=$ fpatio N—D*t w* F + L*xy*O, unde fi PL feu L*x* ponatur $= n$, CD $= m$, LO $= lo = dx$, erit D*t* $= \frac{nn}{m}$, DF $= \frac{n}{m} dx$, hinc fpatiolum D*t w* F $= \frac{n^3}{mm} dx$ & fpatium L*xy*O $= n dx$ & denique fpatium *w u x y* OLF $= N - \frac{n^3}{mm} dx + n dx$) & altitudinem $v + dv$. Eft igitur *afcenfus potentialis* modo dictus $= (N - \frac{n^3}{mm} dx + n dx) \times (v + dv) : M =$ rejectis differentialibus fecundi ordinis $\frac{N}{M} v + \frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} v dx + \frac{n}{M} v dx$, fic ut incrementum *afcenfus potentialis*, quod aquæ acceffit dum guttula *plon* effluxit, fit $= \frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} v dx + \frac{n}{M} v dx$, ubi fpatia N & M funt conftantis magnitudinis ob aquæ continuam affufionem. Non confideramus in hoc cafu primo *afcenfum potentialem* guttulæ *cdfe*, quæ affunditur dum altera æqualis *plon* effluit, quia ifte afcenfus non generatur vi interna, neque enim aqua inferior poft fe trahere ponitur particulam *cdfe*, quin potius hanc vi quadam extrinfeca continue affundi confideramus, idque nec majori nec minore velocitate quam quæ eft fuperficiei *ef*. Ergo omne incrementum hic confiderandum, eft ut diximus

$$\frac{N}{M} dv - \frac{n^3}{mmM} v dx + \frac{n}{M} v dx.$$

Debet

Debet vero iſtud incrementum æquari *deſcenſui actuali* centri gravitatis; Atqui iſte deſcenſus, poſita DL $= a$, eſt per paragraphum ſeptimum *ſect.* 3. $= \frac{nadx}{M}$; habetur igitur talis æquatio

$$\frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{mmM}vdx + \frac{n}{M}vdx = \frac{nadx}{M}, \text{ ſeu}$$

$$dx = Ndv : \left(na - nv + \frac{n^3}{mm}v\right);$$

Hæc vero ſi ita integretur, ut v & x ſimul evaneſcant, dat

$$x = \frac{mmN}{n^3 - nmm} \log. \frac{mma - mmv + nnv}{mma}$$

quæ æquatio, poſito c pro numero cujus logarithmus eſt unitas, æquivalet huic alteri

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN}x}\right)$$

Hæc vero ſolutio quadrat pro caſu primo, ubi aqua ſuperne motu affunditur communi cum deſcenſu ſuperficiei proximæ.

Caſus II.

Quod ſi jam particula *cdfe* lateraliter continue affundi ponatur, tunc propter inertiam ſuam motui aquæ inferioris reſiſtit atque proinde *aſcenſus potentialis* ipſius aliter in computum venit. Tunc autem prius conſiderandus eſt *aſcenſus potentialis* maſſæ aqueæ *cdmlpic* auctæ guttula mox affundenda; deinde indagandus *aſcenſus potent.* ejusdem aquæ in ſitu *cdmlonpic*, poſtquam nempe guttula jam effluxit, eorumque differentia eſt æquanda cum *deſcenſu actuali*, $\frac{nadx}{M}$. Verum *aſcenſus potentialis* omnis prædictæ aquæ ante affuſionem particulæ ejusdemque poſt affuſionem ita invenitur: nempe *aſcenſus potentialis* aquæ *cdmlpic* eſt $= \frac{Nv}{M}$, & *aſcenſus potent.* particulæ affundi paratæ nullus eſt, quia lateraliter affuſa motum communem nondum habet cum maſſa inferiore; Igitur *aſcenſus potentialis* utriusque aquæ (qui ſcilicet habetur multiplicando maſſam reſpective per ſuum *aſcenſum potentialem*, dividendoque productorum aggregatum per aggregatum maſſarum) eſt =

$(M\times\frac{Nv}{M}+ndx\times o):(M+ndx)=\frac{Nv}{M+ndx}$. Poſtquam vero particula ndx ſuperne jam affuſa eſt, communem acquiſivit motum cum aqua proxime inferiori, ſicque fit *aſcenſus potentialis* ejusdem aquæ in ſitu $cdmlonpic$ æqualis tertiæ proportionali ad ſpatium CDLONPIC $(M+ndx)$, ſpatium $Dtnxy$ OLD $(N+ndx)$ & altitudinem $v+dv$, id eſt, $=\frac{(N+ndx)\times(v+dv)}{M+ndx}$, cujus exceſſus ſupra priorem *aſcenſum potentialem* eſt $=\frac{Ndv+nvdx+ndxdv}{M+dx}=$, rejectis differentialibus ſecundi ordinis, $\frac{Ndv+nvdx}{M}$. Habetur igitur talis æquatio $\frac{Ndv+nvdx}{M}=\frac{nadx}{M}$, quæ ut prior per tractata & ad finem deducta dat

$$x=\frac{N}{n}\log.\frac{a}{a-v},\ \text{vel}$$

$$v=a\times(1-c^{\frac{-nx}{N}})$$

quæ ſolutio valet pro affuſione laterali.

Scholion I.

§. 4. Sunt hæ æquationes inter ſe admodum diverſæ; diverſitas autem eo major quo minoris eſt amplitudinis vas; & ſi quidem amplitudo vaſis ſuprema in cd quaſi infinita ſit præ amplitudine foraminis, evaneſcit n præ m fitque in priori caſu ſicut in poſteriori.

$$v=a\times(1-c^{\frac{-n}{N}x})$$

Eſt igitur hâc in hypotheſi motus utrobique idem quod haud difficulter quisque prævidere potuerit. Celerior autem ſemper eſt cæteris paribus motus in priori affuſione, quam in altera.

Conveniet hic rem etiam phyſice explicare, ut eam diſtinctius in omnibus phænomenis percipere poſſimus.

Sit loco vaſis cujuſcunque & quamcunque directionem habentis brevioris delineationis gratia cylindrus verticalis cum foramine in fundo, nempe Fig. 29. GHND (Fig. 29.) ſitque dein vas EFPQ perforatum in RS; fingantur orificia RS & GD perfecte æqualia, & ad minimam diſtantiam ſibi perfecte reſponſpondentia, ita ut aquæ ex ſuperiori vaſe effluentes omnes in cylindrum ſubjectum influant.

Incipiant aquæ ex utroque vaſe effluere, ex ſuperiori autem conſtanter ea effluere velocitate ponantur, quam habet ſuperficies aquæ in cylindro ſuppoſito.

Ita patet ſatisfieri primæ affuſionis conditioni. Jam vero hujus motus phænomena inveſtigabimus, viſuri num cum præcedentibus conveniant.

Conſideremus igitur vas ſuperius eſſe veluti infinitum, ut aquæ per R S effluentes ſingulis momentis habeant velocitatem quæ conveniat altitudini P B ſeu F A: ſic fingendum erit eſſe hanc altitudinem P B ab initio infinite parvam, quia tunc aquæ velocitate infinite parva effluere debent, deinde vero ſenſim creſcere, idque continue magis magisque, donec poſt tempus infinitum motus uniformis maneat, quæritur autem an altitudo aquæ P B tandem infinita futura ſit an vero certum terminum non tranſgreſſura. Id ſic cognoſcetur.

Sit altitudo G H vel R H (neque enim illas inter ſe differre cenſendum eſt) $= a$, A F $= x$, amplitudo orificii L M $= n$, amplitudo orificii R S $= m$; quia vero, ut manifeſtum eſt, utrumque vas cohærere & unum efficere putari poteſt, erit poſt tempus infinitum (per §. 23. Sect. III.) velocitas aquæ in L M $= \sqrt{a+x}$, & in R S $= \sqrt{x}$, (quod poſterius patet, ſi nunc iterum ſeparata vaſa cenſentur, nam utrumque ſine errore fingi poteſt) debent autem velocitates eſſe in inverſa ratione amplitudinum orificiorum: eſt itaque $\sqrt{a+x}. \sqrt{x} :: m. n$, unde $a+x. x : mm. nn$, vel $a. x :: mm - nn. nn$, ergo $x = \frac{nna}{mm-nn}$ & $a+x = \frac{mma}{mm-nn}$, videmus igitur altitudinem, velocitati aquæ in L M debitam, eſſe hoc modo $= \frac{mma}{mm-nn}$, poſtquam ſcilicet infinita aquæ quantitas jam effluxit: ſuperius autem habuimus eandem altitudinem, ſeu $v = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN} x}\right)$, ubi ſi ponitur $x = \infty$ (infinito enim tempore infinita quantitas transfluit) evaneſcit terminus exponentialis, ſi modo m major ſit quam n & ſic fit pariter $v = \frac{mma}{mm-nn}$. Mirabilis eſt iſte conſenſus, quia valde diverſæ ſunt viæ, quas ſecuti ſumus. Cæterum ſi m non ſit major quam n motus nunquam fit permanens nequidem poſt tempus infinitum, creſcit enim tunc velocitas in infinitum cum ſecus altitudo velocitatis nunquam

trans-

tranſgrediatur altitudinem $\frac{mma}{mm-nn}$. De his igitur caſibus nihil eſt quod dicamus.

Scholion 2.

§. 5. Quæſtio hic nunc alia occurrit notatu digna; nempe quis eſſe poſſit modus affuſionis mechanicus, ut vas ſuperius ad debitam durante toto fluxu altitudinem plenum ſervetur. Difficile foret iſtud Problema ob inconſtantiam altitudinis quæſitæ, niſi peculiare hic artificium occurreret, quod nunc tradam.

Nititur autem ſuper eo, quod aqua in ſpatio minimo RSDG nullam patiatur compreſſionem neque affirmativam neque negativam, quia ex hypotheſi communi velocitate movetur cum aqua proxime ſubſtrata, atque ſic nulla particula nullam nec propellere nec retinere tentet.

Fiat igitur vas quod dixi utrumque, ſitque tubus cum vaſe ſuperiore firmatus (neque enim aliter quam demonſtrationis gratia illa poſuimus antea Fig. 30. ſeparata) habeat autem tubus in ſummitate *a* (Fig. 30.) foraminulum, cui reſpondeat tubulus *a m*, in hunc tubulum immittatur tubus vitreus recurvus *a b c d g*, obtectis cera oris *m n*: ducatur horizontalis *ae* noteturque punctum *e*. His ſic præparatis, ſic erit faciendum, ut durante toto experimento ſummitas aquæ conſtanter permaneat in puncto *e*; & ad hoc requiri videbis, ut ab initio ſuperficies aquæ ſit fundo FP proxima, deinde, ut continue elevetur, & denique ut poſt tempus etſi infinitum nunquam tamen tranſcendat altitudinem $\frac{nna}{mm-nn}$, facile autem erit aquarum affuſionem ita moderari, ut ſuperficies à puncto *e* non admodum divagetur, ſi modo circumſtantiæ non ſint ita comparatæ, ut aquæ ab initio nimis celeriter ſint affundendæ.

Quod ſi autem ſuperficiem in tubulo ſupra *e* elevatam animadvertis, inhibe paullo affuſionem, quod faciendum eſſe alibi demonſtrabo, ſi ſecus fuerit, largius aquas affunde.

Nihil habet difficultatis iſtud experimenti genus cujuſmodi ſæpe feci, ſed ne error in experimentum irrepat, examinandus eſt tubi vitrei effectus capillaris; hunc effectum invenies, ſi obturato orificio LM, priusque madefacto tubo, cylindrus aqua impleatur uſque ad ſummitatem, atque ſic invenies ſuperficiem aquæ in tubo pertingere uſque in *f*, locum nempe altiorem quam *e*, hoc-

hoc autem punctum *f* illi, de quo modo diximus, abstrahendo animum à natura tubulorum capillarium, substitues.

Hoc igitur modo recte efficietur affusio ad normam hypotheseos nostræ & sic deinceps de hoc motu experimenta sumi poterunt. Post quam vero sic prolixe satis rem explicuimus, non opus puto monere vas superius non aliter pertinere ad vas cylindricum inferius, quod solum consideramus, quam ut cylindrus eo, quo fieri debet, modo plenus servetur atque sic per *m* non intelligendam esse amplitudinem vasis superioris sed amplitudinem orificii R S, quæ proprie nobis est superficies aquæ, cum aquæ supra R S tantum debitæ affusioni in cylindrum inferiorem inserviant.

Scholion 3.

§. 6. Non debeo hic præterire, quod sic casus habeatur qui pertinet ad *hydraulico-staticam*, de qua scientia quædam monui in Sect. I. §. 8. cognoscimus nempe nunc quanta velocitate aqua in *a* præterfluere debeat ut pressio ejus in latera tubi præcise nulla sit. Hæc vero dum scriberem, jam detexeram leges *hydraulico-staticæ* generales, & non sine voluptate vidi, quod iste casus ceu corollarium ex theoria plane alia deductus similem acquirat solutionem ex theoria generali. Sic omnia ubique mutuo cohærent nexu, legitimamque principiorum applicationem demonstrant.

Scholion 4.

§. 7. Sequuntur nunc quædam de alio aquæ affundendo modo. Ponatur cylindrus R H N G pro vase quocunque, sitque is constanter plenus conservandus affusione laterali: poterit id fieri injiciendo sufficientem aquæ quantitatem per tubulum *m a*; quamvis autem id non fiat sine motu, attamen, quia hic horizontalis est, mox omnis tollitur, & per se neque promovet fluxum per cylindrum neque eundem retardat; sed est alius insuper modus, quem subducto recte calculo eodem recidere intelligimus: nempe si vas E F P Q infinite amplum censemus, & ejus fundum aqua continue obtectum intelligimus, sed ita, ut aquæ altitudo in vase superiori sit pro infinite parva habenda; subministrabit vas superius aquam tubo sibi annexo, neque alius inde motus orietur, quam ab affusione laterali, si modo orificium R S semper obtectum maneat; facile autem fit ut ibi cataracta quædam formetur, si orificium L M amplum, tubusque R S N H longus sit. Quod hic alter modus eundem cum priori effe-

N dum

ctum in motum aquarum exerere debeat, quisque videt ex eo, quod in utroque modo omnis aquæ tubum ingredientis inertia sit ab aqua inferiore superanda. Sed idem etiam *à priori* demonstrari poterit inquirendo in motum, qui inde oriri debeat, secundum æquationem paragraphi octavi Sect. III. quæ hæc est:

$$N dv - \frac{mmvy\,dx}{nn} + \frac{mmv\,dx}{y} = -yx\,dx;$$

accommodabitur autem ad præsentem casum, si pro m, x & $-dx$ substituas respective n, a, & $\frac{n\,dx}{y}$, (cujus rei ratio patebit, si hæc cum illis contuleris) simulque y infinitum ponas; tunc enim evanescit tertius æquationis terminus, fitque omnino, ut pro præsenti negotio supra invenimus,

$$N\,dv + nv\,dx = na\,dx.$$

Postquam in his scholiis motus utriusque indolem, quantum simplex rei consideratio physica permittit, eorumque differentiam ostendimus, simulque modum illos producendi ad legem hypotheseos mechanicum tradidimus, superest, ut reliqua phænomena notabiliora etiam indicentur, quod nunc faciam.

Corollarium I.

§. 8. Si in vase R S N H omnè fundum absit, erit orificium L M = orificio R S; potest etiam hoc ab illo superari, si nempe vasis divergant latera. In his autem casibus nullum habet terminum altitudo v in æquatione

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3 - nmm}{mmN}x}\right)$$

& fit infinita, si quantitas aquæ ejectæ indicata per nx est infinita.

Id quidem per se patet ex æquatione, cum n est major quam m; at cum amplitudines orificiorum sunt æquales, recurrendum est ad æquationem differentialem paragraphi tertii, ex qua ista æquatio proxima deducta fuit, nempe

$$\frac{N}{M}dv - \frac{n^3}{mmM}\cdot v\,dx + \frac{n}{M}v\,dx = \frac{n}{M}a\,dx,$$

quæ posito $n = m$ dat $N\,dv = na\,dx$, id est, $v = \frac{nax}{N}$, ubi v fit manifeste infinita si x est infinita.

§. 9. Sin autem vasi proposito fundum sit, atque in eo foramen, cujus ampli-

amplitudo indicata per n minor sit amplitudine orificii RS expressa per m, habet v valorem quem nunquam attingit quidem, sed tamen proxime assequitur, & ad quem tam cito convergit, nisi data opera vasa huic rei contraria excogitata adhibeantur, ut post minimum fluxus tempusculum, quod sensibus percipi possit, notabiliter ab eo non deficiat. Est autem terminus ille talis, $v = \frac{mma}{mm - nn}$: igitur in casu Scholii secundi §. 5. ultimus terminus PB est $= v - a = \frac{nna}{mm - nn}$. Exemplo citissimam velocitatis ad ultimum suum terminum accessionem illustrabo, postquam æquationem inter v & tempus altitudini v respondens apposuero.

Corollarium 3.

§. 10. In casu affusionis, quam vocamus, lateralis, fit ultima altitudo $v = a$, quæcunque inter utrumque vasis orificium ratio intercesserit.

Corollarium 4.

§. 11. Si vas est cylindricum ejusque longitudo ponatur $= b$, fit (vid. §. 3.) $N = \frac{nnb}{m}$: notetur autem non confundendos esse valores litterarum a & b, primus enim exprimit altitudinem supremi orificii supra inferius, alter longitudinem canalis; Sic itaque conveniunt inter se valores in hoc saltem casu, cum axis vasis linea est recta & verticalis; at si axis tortuosus est, vel saltem non verticalis, differunt à se invicem: Hæc ideo expresse monere volui, ne quis sibi a figuris vasorum, quorum axes ubique rectos & verticales feci, imponi patiatur.

Quod si igitur pro vasis cylindricis ponatur $N = \frac{nn}{m} b$ fit pro affusione verticali

$$v = \frac{mma}{mm - nn} \times \left(1 - c^{\frac{nn - mm}{mnb} x}\right)$$

& pro altera laterali fit $v = a\left(1 - c^{\frac{-mx}{nb}}\right)$.

Problema.

§. 12. Invenire velocitatem aquæ, ex vase constanter pleno effluentis, postquam fluxus per datum tempus duravit.

 Solu-

Solutio.

Retentis hypothesibus & denominationibus omnibus, quas in §. 3. adhibuimus, positoque insuper tempore à fluxus initio præterito $= t$, mutandas habebimus æquationes in dicto paragrapho datas in alias, quæ relationem exprimant inter t & v, eliminatis quantitatibus x & dx. Est vero elementum tempusculi dt proportionale minimo spatiolo dx, quod percurritur, diviso per velocitatem $\surd v$: ponemus igitur $dt = \frac{\gamma dx}{\surd v}$, & sic mutabitur æquatio

$$dx = \mathrm{N}dv : \left(na - nv + \frac{n^3}{mm}v\right)$$

quæ data fuit pro affusione verticali debita velocitate instituenda in hanc

$$(\mathrm{I})\ dt = \mathrm{N}\gamma dv : \left(na\surd v - nv\surd v + \frac{n^3}{mm}v\surd v\right)$$

altera vero affusioni inserviens laterali, nempe $dx = \mathrm{N}dv : (na - nv)$ abit in hanc post eandem substitutionem

$$(\mathrm{II})\ dt = \mathrm{N}\gamma dv : (na\surd v - nv\surd v)$$

Hæ vero æquationes debito modo integratæ dant pro prima

$$(\alpha)\ t = \frac{m\mathrm{N}\gamma}{n\surd(mma - nna)} \times \log. \frac{m\surd a + \surd(mmv - nnv)}{m\surd a - \surd(mmv - nnv)}$$

& pro altera, quæ ex priori deducitur, posito $m = \infty$

$$(\beta)\ t = \frac{\mathrm{N}\gamma}{n\surd a} \times \log. \frac{\surd a + \surd v}{\surd a - \surd v}.\quad \text{Q. E. I.}$$

Scholium.

§. 13. Si vas de quo sermo est sit cylindricum utcunque intortum & inclinatum, cujus longitudo ponatur $= b$, manente altitudine superficiei aqueæ supra foramen $= a$, erit rursus, ut §. 11. $\mathrm{N} = \frac{nn}{m}b$.

Quoniam autem, ut constat, $2\gamma\surd\mathrm{A}$ exprimit tempus, quod corpus insumit cadendo libere & à quiete per altitudinem A, patet quantitatem $\frac{2m\mathrm{N}\gamma}{nn\surd a}\left(= 2\gamma\surd\frac{bb}{a}\right)$ exprimere tempus quo corpus moveri incipiens à quiete liberè descendit per altitudinem $\frac{bb}{a}$: accipiemus istud tempus pro com-

communi menſura idemque ponemus $= \theta$, & mutabitur pro vaſis ſeu canalibus cylindricis æquatio (α) in hanc

$$t = \frac{n\theta}{2\sqrt{(mm - nn)}} \times log. \frac{m\sqrt{a} + \sqrt{(mmv - nnv)}}{m\sqrt{a} - \sqrt{(mmv - nnv)}}$$

altera vera ſignata (β) talis fit

$$t = \frac{n\theta}{2m} \times log. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{v}}{\sqrt{a} - \sqrt{v}},$$

ex quarum utraque apparet, non poſſe non breviſſimo tempore aquas omnem fere velocitatem acquirere, idque eo citius quo amplior eſt tubus, quo brevior, & quo magis verticalis: Neque accelerationes ullo modo eſſe perceptibiles, niſi prælongi ſtatuantur aquæ ductus & tunc quoque brevi tempore omnes fere accelerationum gradus percurri, quod utrumque nunc exemplo illuſtrabo.

(I) Quæritur tempus quo fluidum ex cylindro conſtanter pleno verticali, ſedecim pedes anglicos longo & cujus diameter quintupla ſit diametri foraminis, velocitatem acquirit quæ debeatur altitudini $\frac{99}{100}a$, idque in hypotheſi, ad quam æquatio ſecunda pertinet; ſic eſt $\frac{n}{m} = \frac{1}{25}$, $v = \frac{99}{100}a$, $b = a$, unde tempus quod corpus inſumit cadendo libere per ſpatium $\frac{bh}{a}$, ſeu $\theta =$ uni minuto ſecundo; hinc fit $t = \frac{1}{50}$ $log.$ 399. id eſt, proxime nonæ parti unius minuti ſecundi, quod tempuſculum utique imperceptibile eſt; Cum vero tempus notabile aſſumitur, fiunt mutationes altitudinum v, inſenſibiles. Si tempus ſimile (quo nempe velocitas pariter nonaginta novem centeſimis partibus altitudinis, quanta poſt tempus infinitum fit, debita generetur) in prima hypotheſi quæratur, nempe tempus quo obtinetur $v = \frac{99}{100} \times \left(\frac{mma}{mm - nn}\right)$ reperitur illud præcedente paullulum majus, ſed exceſſu inſenſibili: unde patet in hujusmodi vaſis non poſſe fere aquas ſat celeriter affundi in vas ſuperius, ut hypotheſi ſatisfiat, nec adeoque ratione ejuſdem hypotheſeos experimenta alia ſumi poſſe, quam ut exploretur, num revera tanta ſit altitudo BP in figura trigeſima, quanta vi paragraphi quinti eſſe debet, ut punctum e aut f, durante fluxu ſitum ſervet, quem ante fluxum obturato orificio LM, nullaque exiſtente aqua in vaſe ſuperiore habuit.

 (II) Quæ-

(II) Quæritur nunc idem tempus pro secunda rursus hypothesi, si tubus ejusdem fuerit amplitudinis eodemque foramine instructus, sed oblique situs longitudinemque b habuerit 184 *perticarum* seu 1104 *pedum Paris.* dum altitudo superficiei aqueæ supra orificium effluxus sit 16. *ped. Paris.* Ita fiet $b = 1104$, & $\frac{bb}{a} = 76176$. atque præterpropter $\theta = 72$ *sec. min.* unde tempus quæsitum medium est inter octo novemque minuta secunda, quod certe satis notabile est. Si vero tempus desideretur, quo altitudo v exæquet tantum quartam partem altitudinis a, reperietur illud æquale $\frac{72}{50}$ *log.* $3 =$ proxime uni minuto secundo cum dimidio.

Nescio an hæc conveniant cum iis, quæ Mariottus à se observata refert in *tract. de mot. aquar. part.* 5. *disc.* 1. ubi mentionem facit alicujus fontis salientis, qui est à *Chantilly*, ad quem aquæ devehuntur per canalem 184. *perticas* longum, si modo recte ex antecedentibus conjeci, eratque summa superficiei aqueæ altitudo supra orificium effluxus indicata per a sedecim *pedum*: diameter aquæductus erat 5. *poll.* orificium autem habebat diametrum unius pollicis. Videtur mihi Mariottus ita loqui ac si accelerationes multo fuissent tardiores, quam ab formula nostra indicantur, quod nescio an tribuendum sit huic quod fortasse alium, præter orificium de quo hic sermo est, exitum habuerint aquæ, an, quod aquæ ductus dum fluxus inciperet non fuerit aqua plenus, quod posterius multa faciunt, ut credam; si neutrum fuerit, confido phænomena qualia à Mariotto observata fuerunt & quotidie de novo observari poterunt plane convenisse cum calculo nostro. Cæterum verba Mariotti hæc sunt: *Illud insuper*, ait, *singulari eidem jactui accidit, quod obturato manu orificio per decem aut duodecim scrupulorum secundorum temporis spatium eodemq; postea reserato, aqua non protinus erumpat, sed paullatim assurgens jactus ascendat ad 3. poll. postea ad pedis altitudinem & deniq; ad duos pedes successive notabilibus intervallis...... Sed tandem tamen toto impetu suo aqua exiliebant.*

Problema.

§. 14. Invenire quantitatem aquæ per datum vas, constanter plenum conservandum, dato tempore transfluentem.

Solutio.

Solutio.

Adhibitis rurſus poſitionibus & denominationibus paragraphi tertii & duodecimi, invenienda nunc erit æquatio inter x & t: quia vero, ut vidimus §. 12. eſt $dt = \frac{\gamma dx}{\sqrt{v}}$, erit $\sqrt{v} = \frac{\gamma dx}{dt}$, hicque valor ſubſtituendus erit in æquationibus, quas dedimus §. 3. integratis; prior harum æquationum hæc fuit: $v = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)$

quæ pro præſecuti inſtituto mutatur in hanc

$$\text{(I)}\quad \frac{\gamma\gamma dx^2}{dt^2} = \frac{mma}{mm-nn} \times \left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)$$

altera ex §. 3. allegatarum æquationum talis fuit

$$v = a \times \left(1 - c^{\frac{-n}{N}x}\right)$$

quæ adeoque ſubminiſtrat in præſenti caſu ſequentem

$$\text{(II)}\quad \frac{\gamma\gamma dx^2}{dt^2} = a \times \left(1 - c^{\frac{-n}{N}x}\right)$$

Erunt nunc æquationes (I) & (II) integrandæ, quod quidem facile eſt & quia prior alteram continet (utraque enim eadem eſt ſi $m = \infty$) hanc ſolam pertractabimus, eamque nunc ſub hâc forma conſiderabimus.

$$dt = \frac{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}{m\sqrt{a}}\, dx : \sqrt{\left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)}$$

Ponatur autem ut integrationis modus eo magis pateſcat

$$c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x} = z, \text{ atque proin } dx = \frac{mmNdz}{(n^3-nmm)z},$$

dein brevitatis ergo indicetur quantitas conſtans

$$\frac{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}{m\sqrt{a}} \times \frac{mmN}{n^3-nmm}, \text{ ſeu } \frac{-\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}} \text{ per } \alpha,$$

$$\text{\& habebitur } dt = \frac{\alpha dz}{z\sqrt{(1-z)}},$$

in

in quâ si præterea fiat $1 - z = qq$, seu $z = 1 - qq$, $dz = -2qdq$, oritur

$$dt = \frac{-2\alpha dq}{1-qq} = \frac{-\alpha dq}{1+q} \quad \frac{-\alpha dq}{1-q}$$

cujus integralis est

$$t = -\alpha \log. (1+q) + \alpha \log. (1-q) = \alpha \log. \frac{1-q}{1+q}.$$

Nec opus est constante, quandoquidem ex natura rei t & x, simul evanescere debent, posito autem $x = 0$, fit $z = 1$, & $q = 0$, igitur pariter t & q simul à nihilo incipere debent, cui conditioni satisfacit æquatio inventa $t = \alpha \log. \frac{1-q}{1+q}$: Superest ut retrogrado ordine valores pristinos reassumamus, ita vero fit

$$t = \alpha \log. \frac{1-\sqrt{(1-z)}}{1+\sqrt{(1-z)}} \text{ vel}$$

$$t = \frac{\gamma m N}{n\sqrt{(mm-nn)\,a}} \times \log. \frac{1+\sqrt{(1-z)}}{1-\sqrt{(1-z)}} \text{ vel denique}$$

$$\text{(I)}\quad t = \frac{\gamma m N}{n\sqrt{(mm-nn)\,a}} \times \Big[\log. \big[1 + \sqrt{(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x})} \big] - \log. \big[1 - \sqrt{(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x})} \big] \Big]$$

Itaque æquatio posito $m = \infty$ dat alteram æquationem quæsitam

$$\text{(II)}\quad t = \frac{\gamma N}{n\sqrt{a}} \times \Big[\log. \big[1 + \sqrt{(1 - c^{\frac{-n}{N}x})} \big] - \log. \big[1 - \sqrt{(1 - c^{\frac{-n}{N}x})} \big] \Big] \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium I.

§. 15. Si ponatur $x = \infty$, ut appareat natura rei, cum infinita jam transfluxit aquæ quantitas assumaturque m major quam n, prouti plerumque esse solet, evanescere censenda est, in utroque logarithmo affirmative sumto, quantitas exponentialis & habebitur utrobique $\log. 2$. At vero in logarithmo negative sumto statuenda est

$$\sqrt{\left(1 - c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x} \right)} = 1 - \tfrac{1}{2} c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x} \text{ \& proinde,}$$

log.

$$log.\left[1-\sqrt{\left(1-c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}\right)}\right]=log.\tfrac{1}{2}c^{\frac{n^3-nmm}{mmN}x}=\frac{n^3-nmm}{mmN}x-log.\,2.$$

Hæ ſubſtitutiones ſi recte fiant, erit pro primo quem finximus affuſionis modo

$$\text{(I)}\quad t=\frac{\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}}\times\left(2\,log.\,2+\frac{mmn-n^3}{mmN}x\right)$$

quæ poſito rurſus $m=\infty$ dat pro altero caſu

$$\text{(II)}\quad t=\frac{\gamma N}{n\sqrt{a}}\times\left(2.\,log.\,2+\frac{n}{N}x\right).$$

Sequitur ex iſtis formulis, minori quidem quantitate transfluere aquas, ac ſi ſtatim ab initio omni velocitate, quam in utroque caſu poſt tempus infinitum acquirunt, effluerent: differentiam tamen nunquam certum transgredi terminum & poſt tempus infinitum finitis comprehendi terminis.

Corollarium 2.

§. 16. Quum convertimus æquationes inventas, obtinemus

$$\text{(I)}\quad x=\frac{2mmN}{mmn-n^3}\left[log.\left(1+c^{\frac{-t}{\alpha}}\right)-log.\,2+\frac{t}{2\alpha}\right],\ \&$$

$$\text{(II)}\quad x=\frac{2N}{n}\times\left[log.\left(1+c^{\frac{-t}{\beta}}\right)-log.\,2+\frac{t}{2\beta}\right]$$

ubi α, ut ſupra, $=\frac{-\gamma mN}{n\sqrt{(mm-nn)a}}$ & $\beta=\frac{-\gamma N}{n\sqrt{a}}$.

Si præterea, ut in proximo Corollario, ponatur $t=\infty$, evaneſcit unitas præ quantitatibus, exponentialibus, quæ ſupra omnem ordinem infinitæ ſunt, & fit $log.\left(1+c^{\frac{-t}{\alpha}}\right)=-\frac{t}{\alpha}$ atque $log.\left(1+c^{\frac{-t}{\beta}}\right)=-\frac{t}{\beta}$: unde tunc erit reſumtis valoribus litterarum α & β.

$$\text{(I)}\quad x=\frac{mt\sqrt{a}}{\gamma\sqrt{(mm-nn)}}-\frac{2mmN}{mmn-n^3}\,log.\,2.\ \&$$

$$\text{(II)}\quad x=\frac{t\sqrt{a}}{\gamma}-\frac{2N}{n}\,log.\,2.$$

Igitur ſi ſtatim à fluxus initio utrobique aquæ omni, quam acquirere

 poſſunt,

possunt, velocitate constanter effluerent, non excederet earum quantitas post tempus infinitum quantitatem pro eodem tempore theoriæ respondentem nisi parvula quantitate, quæ in primo casu exprimitur per $\frac{2mmN}{mm-nn}$ *log*. 2. & in secundo per $\frac{aN}{n}$ *log*. 2. Atque si loco temporis infiniti sumas tempus tantum aliquot scrupulorum secundorum, idem *theorema* proxime locum habebit; ita ut si v. gr. post decem prima minuta secunda effluxerit quantitas Q, effluxura fere sit totidem minutis secundis proxime sequentibus $Q + \frac{2mmN}{mmn-n}$, *log*. 2. vel in altero casu $Q + \frac{2N}{n}$ *log*. 2.

Scholium.

§. 17. Ad theoriam hactenus expositam pertinet etiam motus aquarum per siphones. Indicat autem theoria, posse siphonis axem utcunque inflecti, neque inde motum aquarum deturbatum iri, modo altitudo superficiei aqueæ supra orificium effluxus eadem maneat; cum præterea aquæductus, siphones aut diabetæ hujuscemodique vasa alia soleant esse cylindrica erit ut monui §. 13. quoties id contingit, ponendum $N = \frac{nn}{m} b$, intelligendo per b longitudinem canalis aut siphonis: in formulis quoque paragraphorum 14, 15, & 16, erunt quantitates sic interpretandæ, ubi de temporibus quæstio est, ut $2\gamma\sqrt{A}$ repræsentet tempus quod corpus impendit in descensum per altitudinem verticalem A à quiete cœptum.

Cæterum, ut dixi passim, nihil indicat singulare theoria hujus sectionis, quod sub sensus cadat, nisi in aquæ ductibus admodum longis, ad horizontalem valde obliquis & orificium non admodum strictum habentibus; hæc tria enim concurrunt ad retardandas sicque notabiles efficiendas accelerationes, quarum mensuræ potissimum theoriam commendant.

Est tamen & in his circumstantiis medium aliquod observandum, ne impedimenta ab adhæsione aquæ oriunda nimia sint

Quod attinet ad affusionem aquarum, mihi visus sum animadvertere, si ver-

verticaliter fiat & cum impetu, tantum abeſſe, ut inde motus acceleretur, quin potius retardetur, niſi aquarum affuſio fiat in totam ſuperficiem æquabiliter eo, quem §. 4. expoſui, modo, ſi enim aliter affundantur, motus aquarum in vaſe perturbatur, iſque motus confuſus effluxum retardat.

§. 18. Denique huc quodammodo pertinent experimenta ab Clar. Joanne Poleno inſtituta, ut refert in libro primo de *motu aquæ mixto*, p. 21. & ſeqq. quæ ideo hic alleganda eſſe cenſui, quod egregie demonſtrant, ubique celeritatem ultimam in vaſis conſtanter plenis eam eſſe, quæ integræ aquæ altitudini conveniat, ſi vaſa non ſint ſubmerſa, aut differentiæ altitudinum aquæ internæ & externæ in vaſis ſubmerſis, quamvis de cætero nihil in illis ſit, quod nunc novum adhuc ſit, quia nullæ illic conſiderantur accelerationes.

Finge cylindrum, cujus axis habeat ſitum verticalem, amplitudinis veluti infinitæ; fundum integrum ſit: in pariete autem fiſſura ſit axi parallela, foramen habens parallelogrammi rectanguli, quæ à fundo ad cylindri uſque ſummitatem extendatur. Puta porro aquam in cylindrum affundi æquabiliter, ita, ut æqualibus temporibus quantitates injiciantur æquales, effluent aquæ ex cylindro per fiſſuram: nec tamen ab initio eadem effluent quantitate, qua ſuperne affunduntur, ſed minori: igitur aſſurget ſuperficies aquæ in cylindro ad certam uſque altitudinem aſſymptoton; ſi vero is jam intelligatur adeſſe terminus, immutata manebit altitudo aquæ & eadem quantitate effluent conſtanter aquæ, qua affunduntur: Apparet quoque, altitudinem aquæ in cylindro eo majorem fore, quo largius affundantur: Quæritur itaque auctis quantitatibus aquarum dato tempore affundendis, in quanam ratione creſcere debeant altitudines, ad quas aquæ in cylindro aſſurgent.

Solutio hæc eſt. Sit altitudo aquæ, cum eſt in ſtatu permanente $= a$: & abſcindatur à ſuperficie pars quæ ſit $= x$, una cum differentiali dx: ſit latitudo rimæ $= n$, habebimus veluti foramen amplitudinis $= n\,dx$, per quod aquæ effluunt velocitate $\sqrt{x}$: igitur quantitas aquæ dato tempore ibi effluentis eſt ut $n\,dx\sqrt{x}$, cujus integralis eſt $\frac{2}{3}nx\sqrt{x}$; quæ exprimit quantitatem aquæ dato tempore per rimæ longitudinem abſciſſam x effluentem: & ſic quantitas aquæ eodem tempore per rimam integram effluens exprimetur per $\frac{2}{3}na\sqrt{a}$: tantum autem effluit, quantum affunditur; hinc ſi quantitas aquæ dato illo tempore affuſæ dicatur q, erit $\frac{2}{3}na\sqrt{a} = q$. Id indicat quantitates aqua-

 rum

rum dato tempore affundendarum ſequi rationem ſeſquiplicatam altitudinum, ad quas aquæ à fundo cylindri aſcendunt: aut viciſſim altitudines ſequi rationem ſubtriplicatam quadratorum quantitatum, quibus aquæ dato tempore affunduntur.

§. 19. Soluto hoc problemate venio ad alterum Cl. Poleno conſideratum.

Sit idem cylindrus, ſed aquis in foſſa veluti vaſe infinito ſtagnantibus, ſubmerſus; dicaturque altitudo ſubmerſionis $= a$, quæritur nunc iiſdem poſitis, ut antea, rurſus æquatio inter altitudinem α ſuperficiei aqueæ internæ ſupra externam, & quantitatem q dato tempore affundendam.

Quod ad illam rimæ partem α, quæ aquas ejicit & ſupra aquam externam èminet, illam jam vidimus dato tempore erogare quantitatem $\frac{2}{3} n\alpha\sqrt{\alpha}$: reſidua autem rimæ pars ſubmerſa aquas ubique communi velocitate tranſmittit, ut ex infra dicendis patebit, & quidem velocitate $\sqrt{\alpha}$, ita, ut multiplicata hâc velocitate per magnitudinem rimæ ſubmerſæ na, habeatur quantitas, quam dato tempore ejicit $= na\sqrt{\alpha}$. Si utraque quantitas in ſummam conjiciatur, habebitur $(\frac{2}{3}\alpha + a)n\sqrt{\alpha} = q$.

Ope hujus æquationis cognoſcitur q ex datis altitudinibus a & α: aut viciſſim altitudo α ex cognitis quantitatibus a & q.

Convenire autem hanc æquationem admodum accurate cum experimentis, ipſe oſtendit celeberrimus eorum auctor, cujus ſolutio ab hâc noſtra non differt. Sequitur ex iſta æquatione, elevationes α eo majores eſſe pro iiſdem aquarum affuſionibus, quo minor eſt altitudo ſubmerſionis a.

Experimenta quæ ad Sectionem V. pertinent.

Ad §. 5.

VAſe uſus ſum §. 5. deſcripto cum tubulo vitreo (Fig. 30.) Primo autem obturavi orificium L M, tubumque R N aqua implevi, donec ſuperficies ejus raderet foraminulum in a: aquam tunc tubo ingreſſam obſervavi extremitate attigiſſe punctum f: poſtea reſerato orificio L M, & aquis effluentibus novas affundebam in vas ſuperius E F P Q adhibita diligentia, ut extremitas aquæ in f interea nec aſcenderet nec deſcenderet. Hæc dum fierent

rent elevabatur ſuperficies A B, nunquam autem certum terminum tranſgrediebatur; fuit nempe quantum videre potui, maxima altitudo P B ſeu F A $= \frac{nn}{mm-nn}a$, denotante $\frac{n}{m}$ rationem inter orificium inferius L M & ſuperius R S, & a altitudinem verticalem orificii poſterioris ſupra alterum.

Id vero ſolum eſt, quod ipſemet inſtitui experimentum, quamvis multæ ſint propoſitiones in hâc ſectione contentæ, quæ mereantur attentionem eæque ſatis inexpectatæ, non potui tamen de illis experimenta ſumere; ſunt enim ita comparatæ in vaſis brevioribus, ut quod ſingulare habent, id ſenſus effugiat, rem autem experiri in longis aquæductibus commode non potui: cum aliis hæc dabitur occaſio, theoriam hanc examinaturis, animum advertent ad ſequentia:

I°. In fontibus ſalientibus obſervetur altitudo jactus integra; poſtmodum obturato prius orificio eodemque mox reſerato videatur aquæ quantitas, quæ effluat, dum aqua ad dimidiam altitudinem jactus integri, aut aliam partem quamcunque perveniat, quod quidem breviſſimo éveniet tempore, illius quantitatis menſura ſit longitudo cylindri ſuper foramine, per quod aquæ exiliunt, exſtructi, quam longitudinem vocavimus x, altitudinem vero jactus integram nominavimus a, altitudinemque jactus qui nondum totam attigerit altitudinem, obſervatam deſignavimus per v. Tum denique inſtituto calculo exploretur, num hæ quantitates recte reſpondeant æquationibus pro utroque affundendi modo exhibitis in paragrapho tertio.

II°. Fiant omnia, ut ante, hoc ſaltèm diſcrimine, quod loco quantitatis effluentis tempus effluxus notetur, ut ſic examinari poſſint formulæ paragraphi decimi tertii, & denique comparetur quantitas cum tempore fluxus, ut appareat num recte reſpondeat formulæ §. 14.

III°. Tum præcipue fiat id experimenti genus, quod indicavi paragrapho decimo ſexto, obſervando ſcilicet, quantitates aquarum dimidiis temporibus reſpondentes; dixi autem, quantumvis magnum ſumatur tempus, differentiam harum quantitatum nunquam exæquare $\frac{2mmN}{mmn-n^3}$ *log.* 2. in priori, quem finximus, affundendi modo; aut $\frac{2N}{n}$ *log.* 2. in poſteriori.

 Iſtas

Iſtas autem differentias, utut nunquam perfecte orituras, minimo tamen tempore proxime adfuturas eſſe.

Quæ reliqua ſunt in hâc ſectione Corollaria & Scholia quisque facile videbit, quo modo ad experimenta vocari poſſint: Velim autem, priusquam judicium ferat, attentus ſit ad omnes circumſtantias ratione impedimentorum, contractionis venæ, aliorumque, quas nolo ubique repetere. Ad §. §. 17. & 18. Experimenta pro confirmatione problematis §. 17. ad vaſa non ſubmerſa pertinentis, vide p. 26. *lib. cit.* Jll. Poleni.

Cum vero in vaſe ſubmerſo eſſet altitudo $a = 55$. *lin. Paris.* (quæ altitudo ei dicitur mortua) quinque inſtituit experimenta, in quibus altitudo, quam dicit, viva ſeu α erat ſucceſſive linearum $8\frac{3}{4}$; 25; 42; 58 & $73\frac{1}{2}$: his ſubſtitutis valoribus in æquatione §. 18. exhibita ſequitur, quantitates aquarum dato tempore affuſarum fuiſſe ut 100; 199; 299; 396 & 495: actu affuſæ fuerunt in ratione ut 100, 200, 300, 400, & 500: differentia tantilla eſt, ut dubitari poſſit, an non perfectus conſenſus futurus fuiſſet, ſi omnes menſuræ rectiſſime haberi potuiſſent.

Reliqua etiam experimenta à viro Cl. inſtituta cum theoria perfecte conſentiunt: calculum eorum videre eſt apud ipſum Auctorem. E re autem duxi eadem hic apponere, quia ad argumentum hujusce ſectionis pertinent, quamvis cæterum libenter fatear, me magis deſiderare illa experimenta, quæ à calculo mutationem *momentanearum*, nemini quod ſciam adhuc conſideratarum, pendent, quam quæ ſtatum *permanentem* ſupponunt.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO SEXTA.
De fluidis non effluentibus seu intra latera vasorum motis.

§. I.

Hactenus consideravimus aquas effluentes; nunc vero contemplabimur motus aquarum, quæ vasorum limites non præterfluunt. Omnes hos motus ad duo reducam genera, ambo seorsim pertractanda:

1°. Cum fluidum in tubo infinite longo continue movetur versus eandem plagam.

2°. Cum motibus reciprocis seu oscillatoriis agitatur.

De motu aquarum per canales indefinite longos.

Casus I.

§. 2. Sit primo canalis horizontaliter positus, sed amplitudinibus data quacunque varians lege: ponatur fluidum in illo ita positum, quod fieri solet in tubis strictioribus, ut ambæ superficies extremæ situm obtineant ad axem canalis perpendicularem & sic datâ quadam velocitate moveri incipere. Hæc si ita sint, nullaque plane motus impedimenta adesse fingantur, perspicuum est, motui aquarum nullum finem fore, quemadmodum globus super tabula horizontali liberrime progrediens motum sine fine continuat. Attamen insignis inter utrumque motum intercedit differentia: globi nempe partes omnes uniformi continue progrediuntur velocitate, in aqua perpetuo motum mutant: Neque difficile erit motum istum definire, cum considerabimus, motum talem esse debere, ut *ascensus potentialis* totius aquæ idem conservetur, qui ab initio motus fuit: Determinavimus autem *ascensum potent.* aquæ certâ velocitate in canali quocunque motæ in sectionis ter-

tiæ

tiæ paragrapho ſecundo: Igitur nihil ad ſolutionem quæſtionis amplius reſiduum eſt: Neque tamen abs re erit unum alterumve ejus rei exemplum attuliſſe.

Exemplum 1.

Si v. gr. canalis $BgfC$ (Fig. 31.) qui figuram habeat coni-truncati; intelligatur pars ejus $BGFC$ fluido plena moto verſus gf; habeantque particulæ fluidi in GF velocitatem debitam altitudini v; ac denique pervenerit fluidum in ſitum $bgfc$: His poſitis quæritur velocitas fluidi in gf. Vocabo autem altitudinem velocitati aquæ in gf debitam $= V$; Sit vertex coni in H; diameter in $BC = n$; diameter in $GF = m$: longitudo $BG = a$; $Gg = b$, erit diameter $gf = \frac{ma - mb + nb}{a}$. Deinde quia ſolidum $BGFC$ eſt æquale ſolido $bgfc$ erit $BC^2 \times BH - GF^2 \times GH = bc^2 \times bH - gf^2 \times gH$: unde $bc^2 \times bH = BC^2 \times BH - GF^2 \times GH + gf^2 \times gH$: eſt vero $bH = \frac{BH}{BC} \times bc$: igitur $bc^3 = BC^3 - \frac{GF^2 \times GH \times BC}{BH} + \frac{gf^2 \times gH \times BC}{BH} = BC^3 - GF^3 + gf^3$, ſeu

$$bc = \sqrt{Cub.\, n^3 - m^3 + \left(\frac{ma - mb + nb}{a}\right)^3},$$

Eſt vero per §. 3. *ſect.* 3. *aſcenſus potent.* aquæ in ſitu $BGFC$ $= \frac{3m^3 v}{n(mm + mn + nn)}$; pariterque *aſcenſus potent.* ejusdem aquæ in ſitu $bgfc$ reperitur $= \frac{3\alpha^3 v}{n(\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta)}$, poſito brevitatis ergo α & β pro inventis valoribus diametrorum gf & bc. Erit igitur

$$V = \frac{m^3 \times (\alpha\alpha + \alpha\beta + \beta\beta) \times \beta \times v}{\alpha^3 \times (mm + mn + nn) n}.$$

Ex hâc formula facile colligitur, majori continue velocitate moveri particulas anteriores, minori poſteriores, & ſic, ut ſi foraminulum gf cenſeatur infinite parvum, fiat velocitas aquæ in gf infinita & in bc infinite parva.

Exemplum 2.

Fuerit canalis compoſitus ex duobus tubis cylindricis BN & OP (Fig. 32.)

(Fig. 32.) inæqualis amplitudinis; in ramo ampliore moveri ponatur fluidum B G F C versus P velocitate quæ respondeat altitudini v. Ita perspicuum est nullam motus mutationem adfore, priusquam superficies G F pervenerit in M N; ab hoc autem temporis puncto motum continue variari donec fluidum omne subingressum fuerit tubum strictiorem. Quæritur itaque cum fluidum situm tenet $bgfc$, quænam futura sit velocitas superficiei fg; altitudinem autem hujus velocitatis designabimus per V. Fig. 32.

Sint diametri G F & gf ut n & m: longitudo B G vocetur $= a$; b M $= b$, erit O$g = \frac{nn}{mm} \times (a - b)$; *ascensus potent.* aquæ B G F C $= v$; *ascensus potent.* aquæ $bgfc = \frac{n^4 a - n^4 b + m^4 b}{n^4 a} \times$ V; ergo

$$V = \frac{n^4 a}{n^4 a - n^4 b + m^4 b} v.$$

Ex his intelligitur velocitatem primæ guttulæ in tubum strictiorem irrumpentis respondere altitudini $\frac{n^4}{m^4} v$, hanc vero velocitatem citissime decrescere, ita ut postquam parvula fluidi pars transfluxit, jam possit censeri $V = \frac{a}{a-b} v$, & cum omne fluidum transfluxerit, pristinam assumat velocitatem. Fuerit v. gr. diameter tubi amplioris decupla alterius, & effluet prima guttula ex tubo ampliore in strictiorem velocitate debita altitudini $10000\, v$: si vero decimam fluidi partem jam transfluxisse ponas, invenies altitudinem, quæ conveniat velocitati fluidi in tubo strictiori progredientis, proxime æqualem $\frac{10}{9} v$.

Si tempus quæras, quo fiat transfluxus fluidi Of, invenies illud æquale $\frac{2(n^4 a - n^4 b + m^4 b)^{\frac{3}{2}} - 2 m^6 a \sqrt{a}}{3mm(n^4 - m^4)\sqrt{av}}$. Igitur omne fluidum transfluit tempore $\frac{2n^6 a\sqrt{a} - 2m^6 a\sqrt{a}}{3mm(n^4 - m^4)\sqrt{av}} = \frac{2(n^4 + mmnn + m^4)a}{3mm(nn+mm)\sqrt{v}}$, ubi per $\frac{a}{\sqrt{v}}$ intelligitur tempus, quo fluidum in tubo ampliori libere motum absolvit spatium a. Hæc vero, ut dixi, se ita habebunt si nulla sint motus impedimenta, simulque in toto tractu canalis compositi velocitates amplitudinibus reciproce proportionales ponantur. Interim jam alibi monui non posse aquas lateri M N pro-

ximas

ximas hanc legem servare. Cum itaque talis casus occurrit, eo magis conveniet motus realis cum theoria, quo longior fuerit pars *bm* & quo pauciora adfuerint obstacula.

§. 3. Quod si nunc canalis fuerit non horizontaliter sed oblique ad horizontem positus, apparet omnia similiter se habere, nisi quod *ascensus potent.* aquæ in omni situ æquandus sit *ascensui potent.* initiali aucto *descensu actuali*, id est, descensui verticali centri gravitatis. Atque si nullo impulsu aqua sua sponte se movere incipiat, erit simpliciter *descensus actualis* æqualis *ascensui potent.*

Igitur aqua continue progredi perget, quamdiu centrum gravitatis loco humiliori positum est, ac fuit ab initio motus. At vero cum tubus ita fuerit formatus & inflexus eaque fluidi quantitate repletus, ut centrum gravitatis pristinam altitudinem reassumere possit, tunc fluidum motum obtinebit retrogradum & sine fine oscillabitur. De isto motu præcipuam hujus sectionis partem faciente mox dicemus. Interea observare licet, fieri posse, ut aqua omnis ex loco humiliore per altiorem sua sponte sine prævia suctione præterfluat, si modo omnia debito modo se habeant.

De oscillationibus fluidorum in tubis recurvis.

Casus II.

§. 4. Dedit Pater meus in *Comm. Acad. Scient. Petrop.* tom. 2. theoremata quædam, quæ insignem manifestant usum quem theoria virium vivarum habet in rebus mechanicis. Illud vero quod tertio loco positum est ita se habet.

Fig. 33. *Sit tubus cylindricus ABCH (Fig. 33.) utrobique apertus atque inflexus in duo crura BA & CH ad partem horizontalem BC; sit sinus anguli $ABC = p$, & sinus anguli $HCB = q$; existente nimirum sinu toto $= 1$; sit porro ille tubus aqua plenus usque ad horizontalem MN; voceturque L longitudo partis tubi MBCN aqua plena: Erunt agitati liquoris in hoc tubo oscillationes tam majores, quam minores omnes tautochronæ atque ejusdem durationis cum oscillationibus minimis penduli alicujus simplicis, cujus longitudo* $= \frac{L}{p+q}$.

Huic theorematum eodem auctore subnectitur tale corollarium.

Si

Si anguli ABC & HCB sunt recti, qui unicus casus est à Newtono solutus, erit longitudo penduli simplicis, quod oscillanti aquæ isochronum est, $= \frac{1}{2} L$, *ut invenit Newtonus.*

§. 5. Hæc sunt quæ adhuc cum publico communicata fuerunt circa oscillationes fluidorum, & quidem primo à Newtono, ut undarum naturam, à Patre meo, ut fertilitatem principii *virium vivarum* ostenderet. Quia vero nostrum institutum est pleniorem dare de motibus aquarum theoriam, è re erit istud argumenti genus in tota sua extensione prosequi: Igitur disquiram, quibus modis oscillationes fluidi inæquales fiant isochronæ, & quibus non item? Dein pro prioribus dabo longitudinem penduli simplicis tautochroni, pro alteris tempus durationis indicabo: tubos autem utcunque inflexos & inæqualiter amplos considerabo.

Lemma.

§. 6. Sit cAd (Fig. 34.) uter seu canalis aqua plenus formæ cujuscunque datæ desinens utrobique in duos canales cylindricos ac & fd, utcunque ad horizontem inclinatos & cujuscunque amplitudinis, quorum alterum plenum aqua ponam usque in a, alterum usque in f; oporteat determinare altitudinem centri gravitatis omnis aquæ, ex data altitudine centri gravitatis aquæ in utre cAd contentæ, cæterisque quantum sufficit præcognitis. Fig. 34.

Solutio.

Fuerit centrum gravitatis aquæ in vase cAd contentæ in C, ductaque intelligatur per istud punctum C verticalis AB, deinde ducantur horizontales am, cg, fn, & dh una cum verticalibus cb & de. Ponatur $ac = \alpha$: $fd = \alpha$; $bc = b$; $ed = \beta$: amplitudo tubi $ac = g$; amplitudo tubi $fd = \gamma$: sit porro massa aquea seu capacitas canalis $cAd = M$, linea $Ag = f$; $Ah = \phi$: $AC = m$: Dividantur lineæ mg & nh bifariam punctis D & E & sic erunt centra gravitatis aquarum in tubis cylindricis contentarum in altitudinibus punctorum D & E.

His positis fit $AD = f + \frac{1}{2}b$; $AE = \phi + \frac{1}{2}\beta$: massa aquæ in $ac = g\alpha$: in $fd = \gamma\alpha$: Igitur si centrum gravitatis quæsitum pro omni aqua $acAdf$ intelligatur in altitudine F positum, habebitur, ut constat in mechanicis, AF multiplicando massam aquæ in ac per DA, massam aquæ fd per EA & massam

 aquæ

aquæ in cAd per CA, aggregatumque horum productorum dividendo per summam harum massarum. Unde invenitur,

$$AF = \frac{ga \times (f + \frac{1}{2}b) + \gamma\alpha \times (\phi + \frac{1}{2}\beta) + Mm}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Problema.

§. 7. Determinare ubique velocitates aquæ oscillantis, posito oscillationes ultra terminos tuborum cylindricorum non divagari.

Solutio.

Sit aqua oscillationem inchoans in situ $acAdf$ perveneritque postmodum in situm $ocAdp$, retentisque denominationibus in præcedente paragrapho factis, ponatur $ao = x$; erit $fp = \frac{gx}{\gamma}$: unde (si nempe centrum gravitatis omnis aquæ descendisse putetur ex F in O) erit vi præcedentis paragraphi

$$AO = \frac{g \times (a - x) \times (f + \frac{1}{2}b - \frac{bx}{2a}) + \gamma \times (\alpha + \frac{gx}{\gamma}) \times (\phi + \frac{1}{2}\beta + \frac{\beta gx}{2\alpha\gamma}) + Mm}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Inde deducitur descensus centri gravitatis seu *descensus actualis*

$$FO = \frac{(b - \beta + f - \phi)gx - \left(\frac{bg}{2a} + \frac{bgg}{2\alpha\gamma}\right)xx}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Sit nunc velocitas aquæ in tubo ac (cum nempe superficies est in o) talis quæ respondeat altitudini v, & erit tunc *ascensus potent.* aquæ in altero tubo $= \frac{gg}{\gamma\gamma}v$: pariterque *ascensus potent.* aquæ cAd, erit proportionalis altitudini v, eamque proinde ponemus $= Nv$ (ubi N pendet à figura utris cAd & determinari potest per §. 2. Sect. 3.) Jam vero si multiplicatis ubique *ascensibus potentialibus* per suas massas producta dividantur per summam massarum, habebitur *ascensus potent.* omnis aquæ $ocAdp =$

$$\frac{\left(ga - gx + \frac{\alpha gg}{\gamma} + \frac{g^3 x}{\gamma\gamma} + MN\right)v}{ga + \gamma\alpha + M}$$

Et quia hic *ascensus potentialis* est æqualis *descensui actuali* FO paullo ante invento, erit

$v =$

$$v = \frac{(b - \beta + f - \varphi) g x - \left(\frac{bg}{2\alpha} + \frac{bgg}{2\alpha\gamma}\right) xx}{g\alpha - gx + \frac{\alpha gg}{\gamma} + \frac{g^3 x}{\gamma\gamma} + MN} \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium 1.

§. 8. Quia linea $mn = mg - nb + gb = b - \beta + f - \varphi$, ponemus $mn = c$, simulque multiplicabimus denominatorem & numeratorem per $2\gamma\gamma\alpha\alpha$: Ita vero habebimus

$$v = \frac{2g\gamma\gamma\alpha\alpha cx - (g\gamma\gamma\alpha b + gg\gamma\alpha\beta) xx}{2g\gamma\gamma\alpha\alpha\alpha - 2g\gamma\gamma\alpha\alpha x + 2gg\gamma\alpha\alpha\alpha + 2g^3\alpha\alpha x + 2\gamma\gamma\alpha\alpha MN}$$

Corollarium 2.

§. 9. Si fiat $v = 0$, patet tunc valorem x denotare totam fluidi superficiei excursionem in tubo ac, quæ sic invenitur æqualis $\frac{2\gamma\alpha\alpha c}{\gamma\alpha b + g\alpha\beta}$, in altero vero tubo fit $= \frac{2g\alpha\alpha c}{\gamma\alpha b + g\alpha\beta}$.

Igitur poterit aqua in tubo strictiori ad quamcunque elevari altitudinem, si modo ratio amplitudinum g & γ sat magna sumatur.

Corollarium 3.

§. 10. Pars illa vasis cAd, quam neutra superficierum unquam attingi ponimus, nihil pertinet ad istas fluidi excursiones sive augendas sive diminuendas: facere tamen potest, ut inferius ostendetur, ad accelerandas retardandasque oscillationes.

Corollarium 4.

§. 11. Ponatur uterque tubus communis amplitudinis, erit, posito nempe $g = \gamma$,

$$v = \frac{2g\alpha\alpha cx - (g\alpha b + g\alpha\beta) xx}{2g\alpha\alpha\alpha + 2g\alpha\alpha\alpha + 2\alpha\alpha MN}.$$

In hoc casu maxima superficiei utriusque velocitas est, cum in medio totius excursionis positæ sunt, secus ac fit, cum tubi sunt inæqualis amplitudinis.

Notandum quoque eſt, ſimiles eſſe inter ſe retardationes & accelerationes in diſtantiis ſimilibus ſuperficierum à punctis mediarum excurſionum, id eſt, à locis maximarum velocitatum.

Theorema.

§. 12. Cum amplitudines tuborum cylindricorum prædicto modo ſunt æquales, erunt oſcillationes tam majores quam minores inter ſe Iſochronæ, modo ſuperficies nunquam deſcendant infra orificia eorundem tuborum.

Demonſtratio.

Ex mechanicis conſtat, quod ſi mobile oſcillans ſpatium perfecerit $= x$, habeatque in ſingulis locis elementum temporis $dt = \frac{m\,dx}{\sqrt{nx - xx}}$, intelligendo per m & n quantitates conſtantes, id faciat oſcillationes ſuas tam majores quam minores eodem tempore.

Quia vero in noſtro caſu eſt

$$v = \frac{2ga\alpha cx - (g\alpha b + ga\gamma)xx}{2gaa\alpha + 2ga\alpha\alpha + 2a\alpha MN},$$

& quia velocitas ipſa eſt æqualis $\sqrt{v}$, erit

$$dt = dx\sqrt{\left(\frac{2gaa\alpha + 2ga\alpha\alpha + 2a\alpha MN}{g\alpha b + ga\gamma}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2a\alpha cx}{g\alpha b + ga\gamma} - xx\right)},$$

ubi pariter omnes litteræ conſtantem habent valorem præter x, quæ ſpatium percurſum denotat; patet has quoque fluidi oſcillationes iſochronas fore. Q. E. D.

Problema.

§. 13. Invenire longitudinem penduli ſimplicis, quod ſit tautochronum cum oſcillationibus fluidi præfatis.

Solutio.

In mechanicis demonſtratur, quod, cum $dt = \frac{m\,dx}{\sqrt{nx - xx}}$, ſit longitudo penduli ſimplicis tautochroni $= \frac{1}{2}mm$: Erit igitur in noſtro caſu de quo ſermo eſt longitudo penduli quæſita $= \frac{gaa\alpha + ga\alpha\alpha + a\alpha MN}{g\alpha b + ga\gamma}$. Q. E. I.

Corol-

Corollarium. 1.

§. 14. Si ponatur canalis $c A d$ ejusdem amplitudinis cum tubis conjunctis, ejusque longitudo vocetur l, erit massa aquæ in eo contentæ, quam vocavimus $M = gl$; & *ascensus potent.* aquæ in illo contentæ, quem posuimus $= Nv$, erit $= v$, ita ut habeatur $N = 1$. Substitutis autem, istis valoribus pro litteris M & N, prodit longitudo penduli tautochroni pro isto casu particulari $=$

$$\frac{aa\alpha+a\alpha\alpha+a\alpha l}{\alpha b+a\beta} = \frac{a\alpha}{\alpha b+a\beta}\times(\alpha+a+l) = \frac{a+\alpha+l}{\frac{b}{a}+\frac{\beta}{\alpha}}$$

Quia vero $\alpha+a+l$ est longitudo totius tractus aqua pleni & $\frac{b}{a}$ significat rationem sinus anguli bac ad sinum totum pariter atque $\frac{\beta}{\alpha}$ denotat rationem sinus anguli efd ad sinum totum, videmus non differre nostram solutionem ab illa, quam Pater meus pro isto casu dedit, quamque supra recensui §. 4.

Corollarium 2.

§. 15. Si ponatur canalis $c A d$ infinitæ ubique amplitudinis, erit $MN = o$ (per §. 2. *sect.* 3.) & longitudo penduli tantochroni $= \frac{a+\alpha}{\frac{b}{a}+\frac{\beta}{\alpha}}$, quasi nempe totus canalis intermedius $c A d$ abesset, tubique cylindrici inter se immediate essent conjuncti.

Est tamen hic speciale aliquid considerandum, quod infra monebo.

Scholion.

§. 16. Complectitur hoc theorema omnes casus, qui oscillationes tautochronas faciunt, ubi tubi ac & pd sunt recti: cum vero hi tubi, in quibus fluidi superficies excurrunt, incurvati sunt, dantur alii insuper tantochronismi casus, quos facile foret determinare, si hisce diutius immorari vellemus. Cæterum cum tubi hi inæqualis amplitudinis sunt, fiunt quoque tempora oscillationibus diversarum magnitudinum respondentia inæqualia, & quomodo tempus tale definiri debeat unicuique apparet ex §. 8. ubi velocitatem fluidi in quolibet puncto dedimus.

Hæc

Hæc autem de oſcillationibus finitis. Si nunc oſcillationes minimas eſſe cenſeamus, videbimus illas fieri omnes inter ſe tantochronas, manente eadem fluidi quantitate, eodemque canali, quæcunque interea ſint canalis figura & amplitudines. Id exponam in ſequenti paragrapho.

Theorema.

§. 17. Oſcillationes minimæ fluidi in quocunque canali oſcillantis, quamvis inæquales inter ſe, ſunt omnes Iſochronæ.

Demonſtratio.

Cum oſcillationes ſunt minimæ, poſſunt illæ canalis particulæ, in quibus ſuperficies fluidi agitantur, pro cylindricis haberi, igitur manentibus denominationibus iisdem, manebit valor, quem aſſignavimus litteræ v in §. 8. & ex eadem ratione ſequitur, litteras a, b, α, β & x ceu infinite parvi valoris negligi poſſe præ $\frac{M}{g}$, ſic ut in præſenti caſu cenſeri debeat

$$v = \frac{2g\gamma a\alpha cx - (g\gamma\alpha b + gg a b)xx}{2\gamma a\alpha MN}$$

Sunt igitur vi paragraphi duodecimi oſcillationes omnes, quoad minimæ ſunt, inter ſe Iſochronæ. Q. E. D.

Problema.

§. 18. Determinare longitudinem penduli ſimplicis tautochroni cum oſcillationibus minimis fluidi in canali quocunque agitati.

Solutio.

Quia in omni motu eſt elementum temporis $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit nunc

$$dt = dx\sqrt{\left(\frac{2\gamma a\alpha MN}{g\gamma\alpha b + gg a b}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2\gamma a\alpha cx}{\gamma\alpha b + g a\beta} - xx\right)}$$

Igitur vi Paragraphi decimi tertii erit longitudo quæſita penduli cum prædictis oſcillationibus tautochroni $= \frac{\gamma a\alpha MN}{g\gamma\alpha b + gg a\beta}$. Q. E. I.

Scholium.

§. 19. Quamvis jam paſſim monuerim, quid intelligendum ſit per quan-

quantitates M & N, tamen hic apponam totam constructionem, ut natura rei eo magis unicuique pateat.

Fuerit canalis qualiscunque ABCDE, (Fig. 35. *a* & *b*) aqua plenus usque in B & D; ponatur sinus totus $= 1$, sinus anguli DBC $= \frac{b}{a} = m$, Fig. 35. a & b.
sinus anguli BDC $= \frac{c}{a} = n$, erit longitudo penduli tautochroni $= \frac{\gamma MN}{mg\gamma + ngg}$, ubi g denotat amplitudinem canalis in B & γ amplitudinem ejus in D.

Concipiatur nunc longitudo canalis BCD fluido plena in rectam extensa bcd, super qua ceu axe fiat curva FGH, quæ sit scala amplitudinum in locis homologis, ita, ut posita $bc = $ BC sit cG ad bF, ut amplitudo in C ad amplitudinem in B. Igitur si bF repræsentet amplitudinem in B, tunc spatium bdHF repræsentabit magnitudinem M. Deinde super eodem axe bd construatur alia curva LMN, cujus applicata cM sit ubique $\frac{bF^2}{cG}$ & erit (per §. 2. *sect.* 3.) N $=$ spatio bdNL diviso per spatium bdHF, ita ut sit M $\times$ N $=$ spatio bdNL, quod multiplicatum per $\frac{\gamma}{mg\gamma + ngg}$ dabit longitudinem penduli tautochroni.

Corollarium 1.

§. 20. Si tubus BCD sit ubique ejusdem amplitudinis, ejusque longitudo dicatur l, erit FH linea recta ipsi bd parallela, pariter atque LN: hinc spatium bdNL $= gl$ & longitudo penduli tautochroni $= \frac{l}{m+n}$.

Corollarium 2.

§. 21. Sit BCD canalis conicus longitudinis l; erit cG (posita $bc = x$) $= \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$; unde cM $= gg : \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)^2$; ergo spatium bcML $= \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - g} - \frac{ggl}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}} : \left(\frac{x}{l}[\sqrt{\gamma} - \sqrt{g}] + \sqrt{g}\right)$ & proinde totum spatium bdNL $= \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - g} + \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma} - \gamma} = \frac{ggl}{\sqrt{g\gamma}}$: Est igitur longitudo penduli tautochroni cum oscillante aqua $= \frac{l\sqrt{g\gamma}}{m\gamma + ng}$.

Hinc intelligitur cæteris paribus oscillari aquam tardissime cum amplituditudines in B & D sunt in ratione reciproca sinuum angulorum respondentium D B C & B D C: dein quo longior sit pars aqua plena & quo minores anguli modo dicti, eò pariter tardiores fieri oscillationes.

Porro comparatis inter se tubis cylindricis & conicis, positisque angulis B D C & D B C æqualibus, perspicuum est, citius oscillari aquam cæteris paribus in conicis quam cylindricis, quia nempe $\frac{l\sqrt{g\gamma}}{\gamma+g}$ semper minor est quam $\frac{1}{2}l$, quæcunque ratio inæqualis intercedat inter g & γ. Si porro prædicti anguli inæquales ponantur, fieri potest tam ut tardius quam ut citius oscilletur aqua in uno tuborum genere respectu alterius, quod ut exemplo confirmem, ponam angulum D B C rectum, id est, $m = 1$, & sinum alterius anguli B D C seu $n = \frac{1}{4}$, ita erit longitudo penduli pro tubis cylindricis $= \frac{4}{5}l$: Si vero sub iisdem reliquis circumstantiis tubo cylindrico substituas conicum, qui amplitudinem in B habeat quadruplo majorem, quam est amplitudo in D, habebis, posito $\gamma = \frac{1}{4}g$, longitudinem penduli $= l$: longius est itaque cæteris paribus pendulum tautochronum pro tubo conico quam pro cylindrico, & tardius fiunt oscillationes in illo, quam in hoc: sed si nunc, manentibus rursus reliquis, tubum conicum strictiorem ponamus in B quam in D, contrarium erit: fuerit v. gr. $\gamma = 4g$, erit longitudo penduli $= \frac{8}{17}l$, & proinde minor, quam si tubus cylindricus foret; rursusque minor erit, si amplitudinem in B admodum majorem ponas, quam est in D: ita si fuerit $\gamma = \frac{1}{64}g$, erit longitudo penduli $= \frac{8}{17}l$, ut ante. Notabile est, ut in præcedente etiam vidimus exemplo, quod, manentibus amplitudine in B, situ canalis B C D ejusdemque longitudine, duæ semper diversæ definiri possint amplitudines in D pro eadem penduli tautochroni longitudine, nisi cum anguli D B C & B D C sunt æquales. Hujus rei exemplum est particulare, quod, sive amplitudo in D æqualis sit amplitudini in B, sive rationem ad eandem habeat quadratam sinus ang. B D C & sin. ang. D B C, eodem tempore oscillationes fluidi absolvantur in tubo utroque.

Scholion Generale.

§. 22. Experimenta de oscillantibus fluidis ita sumpsi, ut crebra tentatione longitudinem penduli simplicis Isochroni invenirem, hancque longitudinem in diversis casibus talem præter propter esse observare potui, quam

theo

theoria in hâc sectione indicat; aliquando tamen longitudinem illam debitâ paullo majorem inveni; cujus rei rationem haud difficulter hanc esse vidi, quod frictiones fluidi excursiones non solum diminuant, sed & retardent, ut &, quod tubi eo in loco, quo inflectuntur, strictiores esse soleant: Id posterius, si omni cura evitetur, sique ipsæ inflexiones non uno angulo sed lente fiant, & si denique pro liquore oscillante mercurius purissimus adhibeatur, dubium mihi nullum superest, fore ut experimenta præmissam theoriam ad amussim confirment, ita, ut operæ pretium non duxerim anxie de illis inquirere.

Id tamen ratione experimentorum à me institutorum superaddam, quod amplitudines tuborum ante experimentum in diversis eorum locis accurate exploraverim ope columellæ mercurii, quæ dum gradatim totam longitudinem tubi percurreret, longitudinibus suis diversis, quarum mensuras assiduè accipiebam, amplitudinum variationes ubique manifestabat: Et hæ quidem amplitudines ita in tubo erunt explorandæ, postquam jam fuerit incurvatus, nam ab incurvatione amplitudines admodum decrescunt. Hæc ratio fuit, quod in primo hanc in rem à me sumto experimento, successus expectationem meam fefellerit: Tubum nempe vitreum, cujusmodi pro barometris conficiendis adhibere solent, satis amplum eundêmque fere perfecte cylindricum, incurvare feci, ut ostendit propemodum Figura vigesima septima, eoque deinde mercurio maximam partem repleto, oscillationes ejus longe tardius fieri vidi, quam expectaveram, quia non attendi, tubum ab incurvatione in D insigniter fuisse constrictum, præsertim ubi anguli formantur. Hujus igitur rei, ut rationem haberem, tubis deinceps lente incurvatis usus fui, quales ostendit Fig. 35. in iisque amplitudines post incurvationem diligenter exploravi.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO SEPTIMA.
De motu aquarum per vaſa ſubmerſa, ubi exemplis oſtenditur, quam inſigniter utile ſit principium conſervationis virium vivarum, vel iis in caſibus, quibus continue aliquid de illis perdi cenſendum eſt.

PARS PRIMA.
De deſcenſu aquarum.

§. I.

Finge cylindrum aquâ plenum, cujus fundum perforatum ſit, illudque ad certam altitudinem aquæ ſtagnanti veluti infinitæ ſubmerſum, & facile intelliges ſuperficiem aquæ in cylindro contentæ deſcenſuram, & quidem infra ſuperficiem aquæ exterioris, dein rurſus aſcenſuram & ſic porro. Hæ vero oſcillationes admodum differunt ab oſcillationibus in præcedente ſectione conſideratis, in quibus nempe motus reciproci ſemper ſunt inverſo ordine iidem cum motibus, qui præceſſerunt. Quis autem hic præſumat refluxum aquarum ſeu aſcenſum eundem fore, qui fuerat deſcenſus. Talia ſi quis ſtatueret, is certe vehementer falleretur, etiamſi vel nihil motus diminuatur ab adhæſione aquarum ad latera vaſis hujuſcemodique aliis impedimentis, non ſecus atque regulæ motuum à percuſſione pro corporibus elaſticis valde diverſæ ſunt ab iis, quæ pro corporibus mollibus valent, utut in utroque caſu corpora liberrime moveri cenſeantur. Utor hoc ſimili, quod argumentum noſtrum egregie illuſtrat: Prouti enim regulæ motuum in corporibus mollibus recte determinatur, ſi poſt colliſionem ea *vis viva* pars deperdita cenſeatur, quæ in compreſſionem corporum impenſa fuit (neque enim hæc ut in corporibus elaſticis reſtituitur motui progreſſivo) ita aſcenſus fluidi non minus recte definietur, ſi accurate examinetur, quantum *vis viva* ſingulis momentis motui particularum aquearum inteſtino communicetur, nunquam rediturum ad motum progreſſivum, de quo ſermo eſt.

§. 2. Cum itaque res eo deducta ſit, ut exploretur, quantum *vis viva* in motibus iſtis reciprocis continue perdatur, diſquiſitionem ab hoc incipiemus.

Primò

Primò autem patet omnem *vim vivam* quæ particulis effluentibus ineſt tranſire ad aquam externam nec ullo modo promovere ſubſequentem aſcenſum ſeu influxum aquæ externæ in tubum: Nimis hæc eſt clara hypotheſis, quam ut majori explicatione opus habeat: reſpicit autem aquarum effluxum & in hoc unica eſt conſideranda. Venit jam altera, quæ pertinet ad aquarum influxum.

Secundò igitur non minus perſpicuum mihi quidem eſt, quod irruente aqua per foramen majori velocitate, quam quæ aquæ internæ aſcendenti ineſt, exceſſus ille rurſus motum quendam inteſtinum in eadem aqua interna cieat, parum aut nihil ad aſcenſum conferentem. Hoc ſi ita ſit, ponaturque amplitudo foraminis $= 1$, amplitudo cylindri $= n$, *aſcenſus potent.* guttulæ irrumpentis $= nnv$, ejusque velocitas $= n\sqrt{v}$, retinebit hæc particula motu ſuo, quem cum reliqua aqua interna communem habet, velocitatem $\sqrt{v}$, conſervabitque proinde *aſcenſum potent.* v; reliquum autem *aſcenſus potent.* nempe $nnv - v$ ad motum particularum inteſtinum tranſiiſſe cenſendum eſt. Hypotheſis iſta, quamvis Phyſica ſit & proxime tantum vera, tamen magnam habet utilitatem ad motus fluidorum ſine notabili errore determinandos, quoties in vaſe uniformis continuitas, quæ hactenus aſſumta fuit, prærumpitur, veluti cum aqua per plura foramina tranſire cogitur; Imo crediderim unicam eſſe, cujus ope hujusmodi motus mira phænomena recte explicari poſſint. Quapropter velim, ut recte animo perpendatur, antequam ad alia divertatur lector.

§. 3. Jam igitur quæſtionem ipſam examinabimus, incipiendo ab aquarum deſcenſu. Concipiatur cylindrus AIMB, (Fig. 36.) aqua plenus usque in XY & aquæ infinitæ RTVS ſubmerſus, ita ut longitudo ejus ſit in ſitu verticali habeat ejus fundum lumen PL, per quod aqua ex vaſe in aquam circumfluam effluere poſſit. Quæritur velocitas aquæ internæ, poſtquam ſuperficies ejus per datum ſpatium XC vel YD deſcendit, poſita MY vel IX $= a$, MV $= b$, MD $= x$, amplitudine foraminis $= 1$, & denique amplitudine cylindri $= n$. Fig. 36.

Solutio eadem erit, quam pro ſimili quæſtione, ſed ea admodum generali, dedimus in ſectione tertia: obſervetur tantum, quod ſumta particula aquæ infinitè parva CDFE æquali guttulæ PLON eo ipſo tempore ejectæ, *deſcenſus actualis* ſit nunc æſtimandus ex altitudine DV vel CT, cum in altero caſu definiendus erat ex tota altitudine DM.

Sit nempe velocitas ſuperficiei aqueæ CD ea, quæ debetur alti-

altitudini v, & in situ infinite propinquo E F respondebit eadem velocitas altitudini $v - dv$; Et cum *ascensus potentialis* aquæ C D M L P I C sit v, obtinebitur *ascensus potent.* ejusdem aquæ in situ proximo E F M L O N P I E, si multiplicetur massa E F M L P I E $(nx - ndx)$ per suum *ascensum potent.* $(v - dv)$ ut etiam guttula L O N P (ndx) per suum itidem *ascensum potentialem* nnv, aggregatumque productorum dividatur per summam massarum (nx): habetur itaque *iste ascensus potentialis* $= \frac{(nx - ndx) \times (v - dv) + ndx \times nnv}{nx}$

seu $\frac{xv - vdx - xdv + nnvdx}{x}$.

Est proinde incrementum *ascensus potent.* $= \frac{-vdx - xdv + nnvdx}{x}$. (*conf.* §. 6. *sect.* 3.) Istud vero incrementum æquale censendum est cum *descensu actuali* infinitè parvo, qui (per §. 7. *sect.* 3. & per annotationem modo datam) est $= \frac{(x - b)dx}{x}$. Habetur itaque talis æquatio

$$-vdx - xdv + nnvdx = (x - b)\,dx,$$

quæ debito modo integrata mutatur in hanc

$$v = \frac{1}{nn-2} \times \left(x - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}}\right) - \frac{b}{nn-1} \times \left(1 - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-1}}\right).$$

Ex ista vero æquatione talia sequuntur corollaria.

§. 4. Fuerit amplitudo cylindri veluti infinita ratione foraminis, & erit censendum $v = \frac{x - b}{nn}$; ipsaque altitudo pro velocitate aquæ, dum effluit, est $= x - b$. Unde consequens est, aquam effluere velocitate, quam grave acquirit cadendo ex altitudine superficiei internæ supra externam, & eo usque effluet, donec ambæ superficies sint ad libellam positæ, tuncque omnis motus cessabit: adeoque eadem lege aquæ effluunt, quasi fundum situm I M mutaret cum T V.

Cum vero foramen non potest ceu infinite parvum considerari, descendit superficies aquæ internæ infra externam; atque ut innotescat ad quamnam profunditatem] xy sit descensura superficies C D, facienda est $v = 0$, seu

$$(nn-1)\left(a^{nn-1}x - x^{nn-1}a\right) = (nn-2) \times \left(a^{nn-1}b - x^{nn-1}b\right),$$

nunquam autem superficies interna tantum descendet infra superficiem externam

nam, quantum ſuper eandem elevata fuerat, provenit iſte defectus *ab aſcenſu pot.* aquæ durante deſcenſu ejectæ, cui debet eſſe proportionalis.

§. 5. Notabile eſt, quod cum eo profundius deſcendat aqua in cylindro, quo magis ab initio deſcenſus fuerit elevata & quo majori lumine perforatum eſt fundum, nunquam tamen omnis aqua ex cylindro effluere poſſit quantumvis fuerit ante deſcenſum elevata & pars cylindri ſubmerſa utlibet parva, ipſumque ſimul foramen vel totum fundum exhaurire ponatur.

§. 6. Velocitas ſuperficiei aquæ internæ maxima eſt, cum ſumitur

$$x = \left(\frac{a^{nn-1}}{nna - nnb - a + 2b}\right)^{1:(nn-2)}$$

Si proinde $n = 1$, exiſtente ſcilicet orificio cylindri toto aperto, fit $x = b$, & maxima eſt velocitas, cum ambæ ſuperficies ſunt in eadem altitudine poſitæ.

Quia vero multa ſunt, quæ ex hiſce æquationibus dignoſci nequeunt in duobus caſibus, nempe $nn = 1$ & $nn = 2$, hique multa habent particularia, eoſdem ſeorſim jam attingam.

§. 7. Sit primo $nn = 1$, & erit $-x\,dv = (x - b)\,dx$ (*per* §. 3.) vel $-dv = dx - \frac{b\,dx}{x}$, quæ ſic integrata, ut ſit ſimul $v = o$ & $x = a$, dat $-v = x - a + b\,log.\,\frac{a}{x}$, ſeu $v = a - x - b\,log.\,\frac{a}{x}$: Exinde talia deduci poſſunt.

I°. Ut obtineatur maximus deſcenſus, faciendum eſt $a - x - b\,log.\,\frac{a}{x} = o$; patet autem ex iſta æquatione, nunquam negativum valorem obtinere litteram x, imo nequidem totam evaneſcere ſine contradictione, niſi ponatur $\frac{a}{b} = \infty$, quod indicat fieri non poſſe, ut omnis effluat aqua durante deſcenſu in iſto caſu & multo minus in reliquis, quod confirmat paragraphum quintum.

II°. Velocitas maxima talis eſt, quæ debetur altitudini $a - b - b\,log.\,\frac{a}{b}$, atque ſi differentia inter a & b, quam ponam $= c$, ſit valde parva, exiſtentibus nimirum excurſionibus fluidi perexiguis ratione longitudinis, ad quam cylin-

cylindrus eſt ſubmerſus, poterit $log. \frac{a}{b}$ cenſeri $= \frac{c}{b} - \frac{cc}{2bb}$, ipſaque proinde altitudo maximæ debita velocitati ſeu $a - b - b\,log. \frac{a}{b} = \frac{cc}{2b}$, quod motum admodum lentum fore arguit.

Demonſtrabo autem in ſequentibus, totum motum cæteris paribus eundem manere, cum cylindri cenſeantur infinite ſubmerſi, quocunque foramine fundum fuerit perforatum, ita ut motus aquæ internæ à diminuto foramine non retardetur; quod quamvis prima fronte admodum paradoxum videatur, non poterit tamen vera ejus ratio phyſica effugere animum ad hæc attentiorem. In eo ſcilicet verſatur, quod *vis viva*, quæ in tubo generatur, veluti infinita ſit præ vi viva aquæ per foramen tranſeuntis nec adeoque hujus foraminis conſideratio computum diverſum faciat.

Demonſtrabimus etiam ſimiles eſſe motus reciprocos & oſcillationes tam majores quam minores inter ſe eſſe Iſochronas, atque pro hiſce longitudinem penduli ſimplicis tautochroni determinabimus.

§. 8. Fuerit nunc $nn = 2$; Ita vero habetur vi §. 3. $v\,dx - x\,dv = (x - b)\,dx$, vel $\frac{x\,dv - v\,dx}{xx} = \frac{(b - x)\,dx}{xx}$, quæ recte integrata abit in hanc $v = \frac{bx}{a} - b + x\,log. \frac{a}{x}$. Si fiat $\frac{bx}{a} - b + x\,log. \frac{a}{x} = o$, dabit x locum maximi deſcenſus; locus autem maximæ velocitatis habebitur, faciendo $x = c^{\frac{b-a}{a}}\,a$, ubi per c intelligitur numerus, cujus logarithmus eſt unitas.

Poſtquam ſic varios perſtrinximus caſus pro diverſis foraminum magnitudinibus, ſupereſt ut etiam conſideremus, quid in diverſis altitudinum a & b caſibus ſuccedere poſſit.

§. 9. Et primo quidem ſi b nulla ſtatuatur præ a, quod fit cum cylindri fundum tantum radit ſuperficiem aquæ exterioris, tunc prodit

$$v = \frac{1}{nn - 2}\left(x - \frac{x^{nn-1}}{a^{nn-2}}\right)$$

quæ quidem æquatio non niſi forma differt ab illa, quæ §. 14. *Sect.* 3. data fuit pro eo caſu, quo aquæ ex cylindro in aërem ejici ponuntur. Et ſæpe etiam exper-

expertus ſum cylindrum eodem tempore evacuari, ſive aquæ in aërem ejiciantur, ſive fundum aquæ ſtagnanti tantillum ſubmergatur. Docet hæc experientia parum aut nihil obſtare aërem externum effluxui, cum reſiſtentia plus quam octingenties major notabiliorem effectum non exerat. Quia adeoque iſte caſus nihil particulare habet, quod non loco citato monitum fuerit, huic non ulterius immorabimur: Inquiremus potius, quid fieri debeat, cum elevatio aquæ internæ ſuper externam, quanta ab initio deſcenſus eſt, ſumitur valde parva & negligenda præ immerſione cylindri; cui hypotheſi ſatisfit, cum exceſſus altitudinis a ſuper altitudinem b (quem exceſſum rurſus vocabimus (ut §. 7.) c) eſt admodum parvus.

§. 10. Cum itaque ponitur $a-b=c$, ponendum etiam erit $a-x=z$, tumque utraque quantitas, nempe c & z, erunt negligendæ præ quantitatibus a & b, ſed ſi $a-x=z$, erit $x=a-z$ & $x^{nn-1}=(a-z)^{nn-1}=$

$$a^{nn-1}-(nn-1)a^{nn-2}z+\left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)a^{nn-3}zz$$
$$-\left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}.\overline{nn-3}}{2.\ 3.}\right)a^{nn-4}z^3+\text{\&c.}$$

Hæc ſeries quantum ad inſtitutum noſtrum ſufficit eſt continuanda; ſufficiet autem ad tres usque terminos. Igitur in æquatione integrata quam dedimus §. 3. ponemus, $x=a-z$ &

$$x^{nn-1}=a^{nn-1}-(nn-1)a^{nn-2}z+\left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)a^{nn-3}zz \ \&$$

ſic erit

$$v=\frac{1}{nn-2}\left[a-z-a+(nn-1)z-\left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)\frac{zz}{a}\right]$$
$$-\frac{b}{nn-1}\left[1-1+(nn-1)\frac{z}{a}-\left(\frac{\overline{nn-1}.\overline{nn-2}}{2}\right)\frac{zz}{aa}\right]$$

In qua æquatione ſi termini ſe deſtruentes deleantur, atque ponatur $a-c$ pro b, rejiciaturque terminus qui affectatur quantitate $\frac{czz}{aa}$, prodit ſimpliciter

$$v=\frac{2cz-zz}{2a}.$$

ex qua formula, cum littera n evanuerit, indicium habemus, nihil magnitudinem orificii pertinere ad motum aquæ internæ, cujus rei originem jam ſupra (§. 7.) indicavi.

In ſequentibus autem demonſtrabimus, non differre hunc motum à ſubſequente motu refluo, hincque oſcillationes fieri tautochronas. Priusquam vero ad alia pergam monendum duxi, in iſto calculo quantitates $\frac{c}{a}$ & $\frac{z}{a}$ non ſolum præ unitate, ſed & præ $\frac{1}{nn}$ ceu infinite parvas poſitas fuiſſe, ad quod animus probe eſt advertendus in inſtituendis experimentis; licet utique theoriam infinite parvorum ad experimenta, ſine notabili errore revocare diminuendo admodum quantitates, quæ in theoria ceu infinite parvæ conſideratæ fuerunt, ſed faciendum eſt, ut in experimento omnia huic legi ſint ſubjecta. Ita v. gr. ſi in cylindro omne fundum abſit, poſito $n = 1$, idque ſubmerſum ponatur ad altitudinem triginta quinque pollicum, ſatis accurate ſumetur experimentum, cum aqua ante oſcillationes elevata tantum fuerit ad altitudinem unius pollicis ſupra ſuperficiem aquæ circumfluæ; nec dum error notabilis erit, ſi vel orificiium inferius ad dimidium obſtruatur exiſtente tunc $\frac{c}{a}$ ad $\frac{1}{nn}$ ut 1. 9, quæ ratio in noſtro experimento tuto adhuc negligi poteſt: at ſi jam diametrum tubi duplam ponas diametri orificii, occluſis tribus quartis aperturæ integræ partibus, jam fiet $n = 4$ & $\frac{c}{a}$ ad $\frac{1}{nn}$ ut 4 ad 9, quæ ratio non ſatis parva amplius erit, ut experimentum conditionibus theoriæ cum ſufficienti præciſione ſatisfacere affirmari poſſit.

Hic itaque jam porro inquirere conveniet, quid de his caſibus ſtatuendum ſit, quibus $\frac{c}{a}$ & $\frac{1}{nn}$ notabilem quidem inter ſe habent rationem, utraque vero quantitas ſit admodum exigua, quod nimirum fit, cum cylindrus profundiſſime ſubmergitur, ſimul autem fundum parvulo eſt pertuſum foramine.

§. 11. Sed iſte, quem modo finximus, caſus melius ex æquatione differentiali paragraphi tertii, quam ex integrali, ut antea factum, deducitur: poteſt autem pro his circumſtantiis rejici terminus $-v\,dx$ præ $nnv\,dx$, atque ſic aſſumi $-x\,dv + nnv\,dx = (x - b)\,dx$, in quâ ſi rurſus ponitur $a - b = c$ & $a - x = z$, prodit

$$a\,dv + z\,dv + nnv\,dz = (c - z)\,dz$$

cujus

cujus secundus terminus $z\,d\,v$ rursus præ primo negligi potest, ita vero habetur

$$a\,dv + nnv\,dz = (c - z)\,dz.$$

Ponatur hic (sumto α pro numero, cujus logarithmus hyperbolicus est unitas) $v = \frac{1}{nn}\alpha^{\frac{-nnz}{a}}q$; hoc modo mutabitur postrema æquatio in hanc

$$\alpha^{\frac{-nnz}{a}}a\,dq = nn(c - z)\,dz,\ \text{vel}$$

$$a\,dq = nn\,\alpha^{\frac{nnz}{a}} \times (c - z)\,dz:$$

Hæc vero ita est integranda, ut z & v vel etiam z & q simul evanescant; habebitur igitur

$$q = \left(c + \frac{a}{nn} - z\right)\alpha^{\frac{nnz}{a}} - c - \frac{a}{nn},\ \text{vel denique}$$

$$v = \frac{1}{nn}\left(c + \frac{a}{nn} - z\right) - \frac{1}{nn}\left(c + \frac{a}{nn}\right)\alpha^{\frac{-nnz}{a}};$$

Ex ista vero æquatione deducitur:

I. Oriri rursus, ut paragrapho decimo alia mathodo inventum fuit, $v = \frac{2cz - zz}{2a}$, si nempe rursus ponatur $\frac{nnz}{a}$ numerus valde parvus. Id vero ut pateat, resolvenda est quantitas exponentialis $\alpha^{\frac{-nnz}{a}}$ in seriem, quæ est ipsi æqualis, $1 - \frac{nnz}{a} + \frac{n^4zz}{2aa} - \frac{n^6z^3}{2.3a^3} +$ &c. ex quâ pro nostro scopo tres priores termini sufficiunt; eo autem substituto valore rejectoque termino rejiciendo, reperitur ut dixi

$$v = \frac{2cz - zz}{2a}$$

II. At si vicissim $\frac{nn}{1}$ infinites major ponatur quam $\frac{a}{z}$ aut $\frac{a}{c}$, quia tunc $\alpha^{\frac{-nnz}{a}} = 0$, ut & $\frac{a}{nn} = 0$, fieri intelligitur $v = c - z$, sive $v = x - b$, ut §. 4.

III. Neutram vero præmissarum formularum sine notabili errore locum habere patet, cum $\frac{nnc}{a}$, numerus est mediocris, nempe nec infinitus, nec infinite parvus, & tamen utraque quantitas $\frac{nn}{1}$ & $\frac{a}{c}$ infinita.

 Fuerit

Fuerit v. gr. elevatio indicata per c unius pollicis, immerſio cylindri b 80. *poll.* ipſaque a 81. *poll.* dein ponatur diameter tubi tripla diametri foraminis, id eſt, $nn = 81$, erit $v = \frac{2 - z - 2c^{-z}}{nn}$, atque ſi porro ponatur $z = c = 1$, ut habeatur altitudo velocitatis, cum utraque ſuperficies eſt ad libellam poſita, erit $v = \frac{c - 2}{nnc}$, id eſt, proxime $v = \frac{1}{307}$ *poll.* cum ſecundum paragraphum decimum debuiſſet oriri $v = \frac{1}{162}$ *poll.* & ſecundum paragraphum quartum $v = o$. In eodem exemplo fit ſpatium integrum, quod ſuperficies percurrit non omnino octo quintarum partium unius pollicis, locusque maximæ velocitatis eſt præterpropter ſexaginta novem centeſimarum partium ejusdem menſuræ infra altitudinem initialem.

§. 12. Non difficilius eſſet ad omnes vaſorum figuras extendere, quæ hactenus dicta ſunt, imo etiam ad ſpatia finita, quibus aqua externa determinetur: fiunt autem formulæ plerumque adeo prolixæ, ut conſultius duxerim easdem ſilentio præterire, & ſpecimine ſaltem aliquo particularem oſtendere modum, quo theoria ad quoslibet caſus alios eruendos applicanda ſit.

Attentionem particulariorem merentur, quæ de motu aquarum in tubis inferius largiter apertis, & profundiſſime ſubmerſis indicavi, quia in his motus oſcillatorius, ut in pendulis, conſtantis durationis eſt, & undarum in mari fluxus illuſtratur ab illis. Exiſtimavi autem prius de refluxu aquarum in cylindris ſubmerſis generaliter tractandum eſſe, atque oſtendendum in iſta hypotheſi refluxum non differre à præcedente fluxu, quam motus totus oſcillatorius examinetur. Jam igitur de iſto refluxu commentabimur, deinceps utrumque motum in diverſis caſibus combinaturi, ne aliquid in argumento deſiderari poſſit.

PARS SECUNDA.

De aſcenſu aquarum.

§. 13. Poſtquam aquæ deſcenderunt in vaſe ſubmerſo, quantum id ipſis natura rei permittit, duo potiſſimum conſideranda ſe offerunt; primo exceſſus altitudinis ſuperficiei externæ ſupra internam & ſecundo *vis viva* ſeu productum ex *aſcenſu potentiali* in maſſam illius aquæ, quæ ex cylindro in aquam

cir-

circumſtagnantem durante deſcenſu ejecta fuit: hæc enim *vis viva*, quæ redire non poteſt ad aquam in cylindro, facit potiſſimum ut aquæ multum abſint, quo minus priſtinam, ex quâ ceciderant, in refluxu attingant altitudinem: nec tamen unica eſt hæc ratio, etiamſi vel nihil obſtent impedimenta tenacitatis, adhæſionis, hujuſmodique alia: Altera ratio indicata fuit §. 2. Iſtius vero rationis menſura ex ipſo aſcenſu eſt deducenda, cum prior ad deſcenſum pertineat & ſola, abſtrahendo animum ab impedimentis extrinſecis, in cauſa eſt, cur non aqua in aſcenſu tantum ſupra ſuperficiem externam elevetur, quantum infra eandem depreſſa fuerat. Notandum enim eſt, futurum fuiſſe, aquis vel per minimum foramen influentibus, ut eadem velocitate aſcenderent, tanquam ſi omne fundum deeſſet, plenoque orificio irrumperent, ſi modo poſt influxum impetum, quem in aquas internas faciunt, totum exererent ad earum aſcenſum promovendum: Verum quicunque hanc rem recte perpendit facile videt, plerumque impetum iſtum totum fere impendi in motum aliquem inteſtinum, qui nihil aſcenſum promoveat; dico autem notanter plerumque (quod bene notetur velim) quia cum foramen magnum admodum eſt, non difficulter prævidetur, impetum aquarum influentium ita apte fieri, ut motus internus haud parum inde promoveatur; at cum foramen minus eſt, liquet, rem ſecus ſe habere. Recte igitur adhibetur hypotheſis noſtra, cum vel fundum omne abeſt, aut fere totum eſt perforatum (ſic enim exceſſus velocitatis aquæ influentis ſupra velocitatem aquæ internæ nullus, aut valde exiguus eſt, & nullum illa in hanc impetum facit) vel etiam cum foramen minimum eſt, quia ſic omnis impetus infringitur. Sed ſi foramen rationem habuerit ad amplitudinem tubi, veluti ut $\sqrt{2}$. ad 1, vel ut 2. ad 1, aut circiter, major paululum erit motus quam qui ex iſta hypotheſi ſequitur, quia tunc notabilem impetum faciunt aquæ irruentes, nec is omnis per rei naturam perditur.

Facile igitur eſt ſine inſtituto calculo prævidere ſequentes in aquarum, poſtquam ex certa altitudine delapſæ fuerunt, refluxu affectiones.

I. Nullum nempe fore refluxum ſenſibilem, ſi foramen ſit valde parvum.

II. Cum pars cylindri ſubmerſa non mutata maneat, nunquam aquas in refluxu certum terminum prætergreſſuras, ſi vel in infinitum elevatæ fuerint aquæ in prævio deſcenſu: nunquam enim, ex quâcunque altitudine incipiat deſcenſus, omnes aquæ ex cylindro effluunt, ut vidimus, §. §. 5. & 7.

III. Cum defcenfus incipere intelligatur ab altitudine X Y, fubfequenfque afcenfus fieri ufque in CD, fore productum *defcenfus actualis* maffæ aquæ X Y D C ufque ad T V in maffam, menfuram rationis utriufque combinatæ, quæ, ut §. 2. dictum, afcenfum à præcedente defcenfu differre faciunt, & cum ratio fecundo loco recenfita evanefcat, fi omne auferatur fundum I M, fore tunc iftud productum æquale *vi vivæ* omnis aquæ, durante defcenfu ejectæ, ita ut fine alio calculo, præter hactenus jam pofitos, afcenfus aquarum in cylindro toto aperto definiri poffit.

IV. Afcenfum fore æqualem defcenfui, cum cylindrus infinite fubmerfus intelligitur evanefcentibus tunc præfatis diminutionis caufis.

V. Hinc igitur ofcillationes fine fine fore, quia poftremæ ofcillationes femper fint veluti infinite parvæ ratione fubmerfionis altitudinum: faciunt autem impedimenta aliena, quorum nullam hucufque rationem habuimus, ut omnis motus cito admodum ceffet.

§. 14. His generatim præmonitis, problema accuratiori calculo fubjiciemus: duplicem autem dabo folutionem, alteram ad principia modo expofita accommodatam, alteram fpecie quodammodo diverfam.

Igitur retentis tum figura, tum denominationibus §. 3. confiderabimus aquam ex altitudine X Y defcendiffe ufque in xy, & ab hoc termino afcenfum fuum inchoare; dicatur M y vel I $x = \alpha$ & poftquam jam afcendit ufque ad cd vel ef, ponatur M $d = \xi$, $df = d\xi$: His ita ad calculum præparatis, defignataque rurfus per v altitudine debita velocitati aquæ in cd & per $v + dv$ fimili altitudine in fitu proximo ef, inquiremus in *incrementum afcenfus potentialis* aquæ accedens, dum cylindrum fubit guttula L O N P, fuperficiefque ex cd afcendit in ef; Perfpicuum autem eft, cum ubique *afcenfus potent.* aquæ internæ multiplicatus per fuam maffam exprimatur per $n\xi v$ (nec enim ulla attentio adhibenda eft ad motum inteftinum) fore ejusdem producti incrementum $n\xi dv + nv d\xi$: Si vero præterea confideretur *afcenfus potent.* $nnv - v$, (vid. §. 2.) quem guttula influens $n d\xi$ perdit, quique pariter debetur *defcenfui actuali* particulæ aqueæ $n d\xi$ per altitudinem $b - x$, patet effe ponendum

$$n\xi dv + nvd\xi + (nnv - v) nd\xi = (b - \xi) nd\xi, \text{ vel}$$
$$\xi dv + nnvd\xi = (b - \xi) d\xi.$$

Idem

Idem vero aliter ſic invenitur.

Conſideretur ſcilicet guttulæ L O N P quaſi nullam velocitatem fuiſſe, priuſquam influere inciperet, eandem vero ſtatim atque influere incipiat, acquirere *aſcenſum potentialem*, qui ſit $= nnv$, quamvis mox poſt ſui influxum (per annot. ſec. §. 2.) cenſenda ſit motum continuare velocitate communi $\sqrt{v}$. Quo facto ſic erit ratiocinandum. Ante influxum guttulæ, eſt *aſcenſus potent.* aquæ cdMLPIc (cujus maſſa $= n\xi$) $= v$. & *aſcenſ. potent.* guttulæ L O N P (cujus maſſa $= n\,d\xi$) $= o$; ergo *aſcenſus potentialis* omnis aquæ cdMLONPI$c = \frac{n\xi v}{n\xi + n\,d\xi} = \frac{\xi v}{\xi + d\xi}$.

At vero poſtquam guttula LONP influxit ſitumque aſſumſit LonP, eſt ejus *aſcenſ. potent.* $= nnv$, reliquæ autem aquæ efMLonPIe (cujus quidem maſſa rurſus $= n\xi$) *aſcenſus potent.* eſt $= v + dv$; igitur *aſcenſus potent.* omnis aquæ hic conſideratæ poſt influxum guttulæ eſt

$= \frac{n\,d\xi \times nnv + n\xi \times (v + dv)}{n\xi + n\,d\xi} = \frac{\xi v + \xi\,dv + nnv\,d\xi}{\xi + d\xi}$, cum ante eundem influxum fuerit $\frac{\xi v}{\xi + d\xi}$: cepit igitur incrementum $\frac{\xi\,dv + nnv\,d\xi}{\xi + d\xi}$, vel ſimplicius $\frac{\xi\,dv + nnv\,d\xi}{\xi}$. Iſtud vero incrementum æquandum eſt cum *deſcenſu actuali* quem aqua facit mutando ſitum cd MLONPIc ſitu efMLONPIe, qui deſcenſus æqualis eſt quartæ proportionali ad maſſam aquæ internæ $n\xi$, ad guttulam $n\,d\xi$ & altitudinem Vf vel $b - \xi$, ſic ut præfatus deſcenſus ſit $= \frac{(b-\xi)\,d\xi}{\xi}$: unde iterum habetur talis æquatio

$$\xi\,dv + nnv\,d\xi = (b - \xi)\,d\xi;$$

Hujus vero integralis poſt debitæ conſtantis additionem talis fit

$$v = \frac{b}{nn}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{nn}\right) - \frac{1}{nn+1}\left(\xi - \left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^{nn}\alpha\right),$$

quam nunc pro diverſis ejus circumſtantiis perpendemus.

§. 15. Et quidem cum fuerit amplitudo tubi infinities major, quam amplitudo foraminis, patet fieri $v = \frac{b - \xi}{nn}$, & irruere proinde aquam velocitate quæ debeatur altitudini ſuperficiei externæ ſuper internam, neque tunc ultra ſuperficiem aquæ externæ fiet aſcenſus. Cum

Cum vero amplitudo foraminis rationem habet finitam ad amplitudinem tubi, afcenfus fit ultra fuperficiem R S veluti usque in $s\,t$: minor autem femper erit Vt quam Vy, nifi cum omne fundum abeft, tunc enim erit $Vt = Vy$. Prouti monuimus §. 5. in defcenfu differentiam inter V Y & Vy, proportionalem effe & originem debere *afcenfui potentiali* aquæ durante defcenfu ejectæ, ita nunc obfervari poteft in afcenfu differentiam inter Vy & Vt originem habere ab illifione guttularum L o n P in maffam aquæ fuperjacentis, quæ quidem illifio non promovet afcenfum, fed in inutilem motum inteftinum impenditur, prouti indicatum fuit §. 2. Ergo cum omne fundum I M abeft, aqua tubum eadem velocitate ingreditur qua jam gaudet aqua tubum antea ingreffa & nulla fit collifio, quæ caufa eft cur in ifto cafu tantum afcendat aqua ultra fuperficiem R S, quantum fuerat infra illam depreffa, quod æquatio, uti mox videbimus, indicat.

§. 16. Determinabitur maximus afcenfus $s\,t$, faciendo $v = o$. Igitur ut motus omnis recte definiatur, alternatim adhibendæ erunt formulæ §. §. 3. & 14. erutæ, quod nunc hoc unico illuftrabo exemplo, quo $nn = 1$.

Si proinde $nn = 1$, fit $v = b\left(1 - \frac{\alpha}{\xi}\right) - \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\alpha\alpha}{\xi}\right)$: eritque $v = o$, cum fumitur $\xi = 2b - \alpha$, id eft, cum fumitur $Vt = Vy$. Igitur fi verbi gratia tubus A B M I aqua plenus, omnique fundo deftitutus fuerit ad medietatem usque immerfus aquæ exteriori, atque tota ipfius longitudo dicatur a, aqua fic agitabitur ut primo infra T V defcendat, fpatio $0,297a$, deinde fimili fpatio fuper eandem T V elevetur, rurfusque infra eam deprimatur fpatio $0,240a$, eodemque lineam illam iterum tranfcendat, & fic porro.

§. 17. Patet etiam cum α eft $= o$, tubo fcilicet ab omni aqua vacuo, fore generaliter $v = \frac{b}{nn} - \frac{\xi}{nn+1}$: afcenfumque integrum confequenter fore $\frac{nn+1}{nn}b$ vel afcenfum fupra fuperficiem exteriorem aquæ $= \frac{b}{nn}$.

§. 18. Venio nunc ad tubos infinite fubmerfos, in quibus defcenfum cum fuis affectionibus determinavimus §. 10. Utemur autem eadem plane methodo ad hunc cafum definiendum quâ ibi ufi fumus: erit nobis igitur depreffio initialis Vy $(= b - \alpha) = c$, afcenfus inde factus $y\,d$ $(= \xi - \alpha) = z$.

Sic

Sic eſt $\xi = \alpha + z$ & $b = \alpha + c$, ubi quantitates z & c ſunt ceu infinite parvæ conſiderandæ ratione quantitatis α. Habetur hinc

$(\frac{\alpha}{\xi})^{nn} = (\frac{\alpha}{\alpha + z})^{nn} = (1 + \frac{z}{\alpha})^{-nn} =$ adhibendo ſeriem notam & ex illa ſumendo tres primos terminos $1 - \frac{nnz}{\alpha} + \frac{nn.\overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}$. Subſtitutis iſtis valoribus pro b, ξ & $(\frac{\alpha}{\xi})^{nn}$ mutatur æquatio ultima paragraphi decimi quarti in hanc, $v = \frac{\alpha + c}{nn} \times (\frac{nnz}{\alpha} - \frac{nn \times \overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}) -$

$$\frac{1}{nn+1} \times (\alpha + z - \alpha + nnz - \frac{nn.\overline{nn+1}zz}{2\alpha}) =$$

$$(\alpha + c) \times (\frac{z}{\alpha} - \frac{\overline{nn+1}zz}{2\alpha\alpha}) - (z - \frac{nnzz}{2\alpha}) =$$

$\frac{cz}{\alpha} - \frac{zz}{2\alpha} - \frac{\overline{nn+1}czz}{2\alpha\alpha}$: Poteſt autem negligi iſte ultimus terminus & ſic fit ſimpliciter

$$v = \frac{2cz - zz}{2\alpha},$$

quam æquationem n non amplius ingreditur: Neque illa differt ab æquatione pro deſcenſu §. 10. data, nempe $v = \frac{2cz - zz}{2a}$, quandoquidem quantitas a & α non differunt niſi quantitate minima $2c$.

Cæterum hic omnia etiam ſunt ſubintelligenda, quæ eodem §. 10. de tubo non nimis obſtruendo dicta ſunt.

§. 19. Sunt igitur deſcenſus & aſcenſus ſibi æquales; nam ex æquationibus noſtris patet, liquorem æqualiter librari ultra ſuperficiem aquæ externæ. Deinde vero potiſſimum ſequitur ex iſtis formulis, eſſe vel oſcillationes inæquales inter ſe iſochronas, modo omnes poſſint infinite parvæ cenſeri ratione ſubmerſionis: Pendulum autem ſimplex tautochronum eſſe ejuſdem longitudinis cum parte tubi ſubmerſa.

Differt iſtud theorema ab illo, quod §. 4. *ſect.* 6. de oſcillationibus in tubo cylindrico ex duobus cruribus verticalibus compoſito citatum fuit, in eo, quod ibi oſcillationes omnes non excluſis oſcillationibus finitæ magnitudinis ſint tautochronæ, cum in præſenti caſu oſcillationes finitæ ſint inæqualis durationis;

tionis; deinde quod ibi longitudo penduli ſit æqualis dimidiæ longitudini tubi, cum hic ſit æqualis integræ, quamvis ſi recte res perpendatur, hic potius ſit conſenſus quam diſſenſus dicendus ob tubi, quæ in priori caſu eſt, duplicationem.

§. 20. Utroque oſcillationum genere illuſtratur natura undarum vento agitatarum: neque enim aliter moventur, quam quod aquæ in illis continue aſcendant rurſuſque deſcendant. Ita patet quod dicit Newtonus, tempora undulationum eſſe in ratione dimidiata latitudinum undarum, quia ponit undarum formam ſibi conſtanter eſſe ſimilem & proinde earum latitudinem proportionalem profunditati, ad quam aquæ agitantur. Veriſimile autem eſt profunditatem eam eſſe, quæ pendulo ſimplici cum undis tautochrono, nempe *v.gr.* $60\frac{1}{2}$ *ped. Pariſ.* ſi ſingulis binis ſecundis fiat undarum aſcenſus deſcenſuſve.

§. 21. Quamvis noluèrim ad prolixitatem calculi evitandam, hoc argumentum in omni ſua extenſione proſequi, propterquê ea de cylindricis vaſis tantum egerim, attamen quia in caſu ſubmerſionis infinitæ, enunciationes & theoremata parum de ſua concinnitate perdunt, ſuperaddam theorema generale pro oſcillationibus aquæ in tubo utcunque inæquali, omiſſa tamen demonſtratione, quæ ex alibi dictis unicuique obvia erit, præſertim vero ex iis quæ in *Sect.* 6. §. §. 6. 7. & *ſeqq.* uſque ad 20. expoſita fuerunt. Faciendum autem eſt, ut cylindricæ ſit ſtructuræ pars illa vaſis ſuperior, in quâ excurſiones fiunt.

§. 22. Fuerit igitur bd longitudo vaſis ſubmerſi (Fig. 35. b) Repræſentet bF ejus amplitudinem in loco ſuperficiei, ponaturque vas ita formatum, ut ſit curva FGH ſcala amplitudinum: ſumatur linea bc fiatque curva LMN, cujus applicata cM ſit ubique $= \frac{bF^2}{cG}$, & erit longitudo penduli iſochroni cum oſcillationibus aqueæ ſuperficiei $=$ ſpatio bdNL diviſo per bL.

Corollarium.

§. 23. Ex præcedente paragrapho ſequitur, ſi tubus ſubmerſus conicus fuerit, habeatque amplitudinem in regione aquæ ſuperficiei, quæ ſit ad orificium ſubmerſum ut m ad n, fore longitudinem penduli Iſochroni cum vibrante aqua ad longitudinem ſubmerſi tubi, ut $\sqrt{m}$ ad $\sqrt{n}$, id eſt, ut radices prædictarum amplitudinum, atque ſi tubus idem ſitu, modo recto modo do inverſo, ſubmergatur tantum non totus, fore longitudines pendulorum iſochronorum in ratione contraria orificiorum ſubmerſorum.

Scholium Generale.

§. 24. Quæ in hac ſectione continentur, quia novis hypotheſibus innituntur pleraque, eo magis operæ pretium erit experimentis tentare. Ego quidem diverſa inſtitui, non vacavit autem ſingula quæ mente conceperam exequi: quæ feci inferius recenſebo; Interim ut tutius judicium ferri poſſit de conſenſu experimentorum cum theoria, diſpiciendum prius erit pro rerum circumſtantiis, an & quantum fere contractio venæ effluentis (cujus naturam expoſui in *ſect.* 4.) calculum turbare poſſit: quod incommodum maxima parte tolli poterit, ſi fiat ut orificii inferioris latera parvulum aliquem cylindrum efforment, vix dimidiæ lineæ altitudinis, qua de re animo revolvatur experimentum quartum ad ſectionem quartam pertinens. Deinde etiam animus advertendus ad reſiſtentias ab adhæſione aquæ oriundas, quæ quidem parum retardant motus, ſi tempora oſcillationum reſpicias, multum autem excurſionibus detrahunt, præſertim ſi tubi ſtrictiores & longiores ſumantur. Igitur magis fidendum erit experimentis, quæ circa oſcillationum tempora facta fuerint, quia hæc tempora à diminutione excurſionum non multum admodum alterantur. Ratione primi experimentorum generis, quo excurſiones fluidorum in tubis, tam deſcenſus quam aſcenſus inquirendi obſervandique veniunt, hâc uſus fui circumſpectione, ut filum tubo circumvolverem eo in loco, ad quem aquas deſcenſuras vel aſcenſuras eſſe expectabam, idemque filum poſt ſæpe repetitum experimentum ita tandem locavi, ut ſuperficies fluidi oſcillantis nec ultra nec citra excurreret. Reliqua etiam loca, quæ in tubo obſervanda erant, pariter filo circumvoluto notavi. Quod deinde ad tempora oſcillationum pertinet, quia hæ citiſſime decreſcunt fiuntque imperceptibiles & plane nullæ, non potui illa aliter inquirere, quam explorando poſt ſæpiſſime iteratum experimentum longitudinem penduli ſimplicis iſochroni, quod dum oſcillabat digitum orificio tubi ſuperimpoſui eumque eo præciſe temporis puncto removi, ut & pendulum & fluidum oſcillationem ſimul inciperent.

 EX-

EXPERIMENTA
Ad Sect. Sept. referenda.

Experimentum 1.

Tubum adhibui vitreum cylindricum diametri fere quatuor linearum, inferius totum apertum. Eum aquæ, in vase pellucido amplissimo stagnanti, submersi ad altitudinem 44. *lin.* digitumque orificio admovi superno, ne extrahendo tubi partem descenderet in illo aqua: extraxi deinceps tubum ad alt. 22. *lin.* ita ut tam pars tubi submersa, quam altitudo aquæ internæ supra externam esset 22. *lin.* moxque remoto digito observavi descensum superficiei in tubo infra superficiem aquæ stagnantis eumque vidi fuisse $9\frac{1}{2}$ *lin.*

Debuisset autem vi §. §. 7. & 17. descendere tredecim lineis; Defectus trium linearum cum dimidia unice fere adhæsioni aquæ ad latera tubi tribuendus videtur.

Observato descensu totum experimentum repetii, ut ascensum quoque proximum experirer: Visus autem mihi fuit 8. *lin.* qui vi paragraphi decimi sexti, habito respectu ad prævium descensum, esse debuerat $9\frac{1}{2}$ *lin.* nempe tantus, quantus fuit præcedens descensus. Hic vero experimentum unica tantum linea cum dimidia defecit, cum in prima experimenti parte ad tres usque lineas cum dimidia defectus adfuit, quia nimirum major ibi facta fuit excursio eaque velocitate majori, ita ut impedimenta, quæ una cum velocitatibus crescunt, admodum majora offenderit.

Experimentum 2.

Eodem tubo usus sum, sed eo lamina munito, quæ foramine erat pertusa amplitudine $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ratione amplitudinis tubi, cum superficies tubi esset octodecim lineis elevata supra aquam stagnantem, totidemque lineis fundum submersum, vidi superficiem tubi in descensu quinque fere lineis infra aquam stagnantem descendisse.

Paragraphus octavus autem descensum arguit $7\frac{1}{2}$ *lin.* defectum, qui plusquam $2\frac{1}{2}$ *lin.* fuit, rursus adhæsioni aquæ ad latera tubi adscribo.

Deinde

Deinde tubum hunc eadem lamina instructum admoto superius digito aquæ immisi, ad profunditatem 18. *lin.* totum ab aquâ vacuum: remoto digito emersit superficies tubi supra aquam stagnantem integris octo lineis, cum §. 17. earum novem indicat pro isto casu.

Quod hic defectus minor admodum fuerit, quam in descensu, rationi adscripsi, quam prolixe paragrapho decimo tertio indicavi, cum dicerem motum paullo majorem oriturum, cum foramen amplitudinem respectu tubi notabilem veluti in ratione $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad 1, aut circiter habuerit, quam qui ex hypothesi sequitur: atque ut ea de re certus plane fierem, tubum adhibui breviorem & ampliorem, ut omnis fere impedimentis alienis effectus praeriperetur, & experimentum cepi, quod sequitur.

Experimentum 3.

Tubum adhibui cujus diameter erat plus quam septem linearum, quem ex ferro confieri curavi, quia vitreus bene cylindricus non fuit ad manus: longitudo ejus fuit quatuor pollicum cum sex lineis & semisse: amplitudo ejus ratione foraminis indicata per n fuit $= 1, 860$ & $nn = 3, 458$.

De isto tubo experimentum ita sumsi:

Obturato scilicet orificio superiori identidem tentavi, ad quam profunditatem submergendus esset aquæ in arca amplissima stagnanti, ut remoto protinus digito, qui orificium obtegebat, aqua ad limbum ejusdem orificii præcise ascenderet, nihilque præterflueret. Istam vero profunditatem expertus sum 3. *poll.* cum tribus *lineis*; fuit igitur ascensus supra aquam externam unius pollicis & trium linearum cum dimidia, cum vel omnibus remotis impedimentis parum ultra undecim lineas ascensus fieri debuerit vi paragraphi 17. Recte igitur præmonitum fuit §. 13. non posse non ascensus fieri paullo majores in istiusmodi casibus, quam hypothesis postulat. Mox eidem tubo aliud applicui fundum; erat jam $n = 3, 68$, & $nn = 13, 54$: difficile fuit experimenti successum recte dignoscere, quia superficies in tubo ascendens semper fuit bullata: visum tamen fuit, tubum nunc immergendum fuisse ad altitudinem 4. *poll.* cum duabus tribusve lineis, manentibus sic extra aquam præterpropter quatuor lineis, prorsus ut theoria indicat.

Experimentum 4.

Tubum cylindricum vitreum, qui tres præterpropter lineas habebat in diametro immerſi ad altitudinem 20. *poll.* fecique, ut aqua in illo libraretur, elevata prius aquâ ad altitudinem unius fere pollicis. Ultra quatuor vel quinque itus reditusque bene notabiles non fecit, nec adeoque omni rigore longitudinem penduli ſimplicis iſochroni examinare potui; mihi tamen illa viſa fuit 22. aut 23. pollicum; ex quo intuli adhæſionem aquæ ad latera tubi non ſolum diminuere excurſiones, ſed & morari pauliſper tempora oſcillationum: debuiſſet enim ſecundum §. 19. eſſe præfata longitudo viginti tantummodo pollicum. Idem expertus ſum in oſcillationibus, quas in ſuperiori ſectione pertractavimus.

Cæterum obturato vel ad dimidium fere orificio inferiori, obſervare non potui, excurſiones inde fuiſſe diminutas aut oſcillationes retardatas, quod conforme eſt cum iis, quæ §. §. 7. & 18. habentur.

Experimentum 5.

Tubum conicum longitudine 21. *poll.* immerſi aquæ orificio ampliore, ita ut unicus pollex extra aquam emineret: fuit autem alterum orificium alterius paululum plusquam duplum. Longitudinem penduli iſochroni cum vibrationibus aquæ in tubo libratæ inveni quindecim *poll.* debuiſſet autem ſecundum §. 23. eſſe eadem longitudo paullo minor quatuordecim pollicibus. Denique ſimiliter eodem tubo uſus, ſed ſitu inverſo, deprehendi longitudinem penduli iſochroni tantillo plusquam duplam ejus, quæ antea fuerat, prouti citato paragrapho indicatur.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO OCTAVA.

De motu fluidorum cum homogeneorum tum heterogeneorum per vasa irregularis & præruptæ structuræ, ubi ex theoria virium vivarum, quarum pars continue absorbeatur, explicantur præcipue Phænomena singularia fluidorum, per plurima foramina trajectorum, præmissis regulis generalibus pro motibus fluidorum ubique definiendis.

§. I.

ALiis adhuc principiis præter quam in sectione proxime præcedente usi non sumus, quam hisce duobus *quod velocitates fluidorum sint ubique reciproce proportionales amplitudinibus vasorum*, cujus ope invenitur *ascensus potentialis* totius aquæ ex dato *ascensu potentiali* cujusvis particulæ; tum quod *ascensus pot.* totius aquæ perpetuo æqualis maneat *descensui actuali.* Quoties ambo hæc principia locum habent, minime dubitandum est, quin methodo à nobis adhibita motus fluidorum recte definiatur. Non diffitebor tamen, hujusmodi fieri posse structuræ vasa, in quibus fluida moventur, ut neutrum istorum principiorum recte procedat. Prius equidem raro aut nunquam notabiliter à vero abducit, quia ubicunque locum non habet, ibi nullum fere aquæ habere solent motum, possuntque sine sensibili errore ceu stagnantes considerari : Longe vero aliter comparatum est alterum principium, quod apparebit ex inferioribus exemplis, & cujus rei luculentum esse possunt testimonium ea, quæ in superiori sectione protulimus circa refluxum aquarum ; tantum enim abest, ut aquæ in vase submerso ex data altitudine delapsæ, ad hanc altitudinem regredi possint, prouti vi istius principii deberent, sublatis impedimentis extrinsecis, quin potius plerunque vix sensibilis sit earum ascensus præ descensu, quem antea fecerunt: imo nequidem ascendere superficies aquæ potest tan-

tantum fupra aquam, cui tubus immergitur, quantum infra eandem depreffa fuerat, nifi cum tubus totus eft apertus : ifta vero fuperficies multo minus deprimitur quam antea fuerat elevata. Horum rationem dedimus in fuperiori fectione : Hæc quia ita funt, regulas nunc dabo duas pro motu aquarum ubique definiendo, easque porro exemplis illuftrabo talibus, quæ nulla adhuc theoria explicari potuerunt, cum noftra autem egregie admodum conveniunt.

Regula 1.

§. 2. Difpiciendum eft, affumta alicubi in vafe propofito velocitate fluidi ceu cognita, quænam reliquis fluidi partibus futura fit velocitas. Ita enim cognofcetur *afcenfus potentialis* totius fluidi ejusque incrementum. Hactenus confideravimus fluida in infinita ftrata parallela vel potius ad latera vafis ubique perpendicularia divifa, ftatuimusque velocitates hifce ftratis reciproce proportionales: Facile quidem eft vafa effingere, ubi aliter moventur fluida; crediderim autem his in locis motum notabilem nunquam habere fluida ita, ut error ex ifta hypothefi fenfibilis nafci fere non poffit: poterit tamen majoris accurationis ergo præfata regula adhiberi. Præfertim vero huc pertinet contractio venarum, cum fluida per foramina in tenuibus admodum laminis facta transire coguntur, qua in re magna eft adhibenda circumfpectio: Effectus hujusmodi contractionum haud male, puto, prævidebuntur, cum recte perpenfa fuerint, quæ in fectione quarta de illis monui.

Regula 2.

§. 3. Singulis momentis difpiciendum eft, quantum *vis vivæ*, feu quodnam productum ex *afcenfu potentiali* in maffam oriatur ad fluxum præcipuum, cujus natura quæritur, nihil conferens. Id vero rurfus uniuscujusque circumfpectæ æftimationi relinquendum eft. Quod fic oritur, addendum eft facto ex *afcenfu potentiali*, quem motus præcipuus involvit, in maffam, aggregatumque productorum demum æquale cenfendum eft facto ex mafsâ omnis aquæ in ejusdem *defcenfum actualem*.

Magni profecto eft momenti hæc regula, & ut puto, fere unica ad motuum menfuras obtinendas, qui in vafis irregularibus, pluribusque cavitatibus inter fe communicantibus divifis fiunt, quod nunc pluribus illuftrabo exemplis.

Prc-

Problema.

§. 4. Propositum fuerit vas ACRB (Fig 37.) infinitæ quasi ratione foraminum mox dicendorum ubique amplitudinis & diaphragmate aliquo EF in duas distinctum cavitates inter se communicantes, mediante foramine G: habeat præterea vas illud in infima sui parte aliud foramen D: deinde ponatur vas aquâ plenum usque in PQ, sic ut cavitas inferior CEFR tota sit humido repleta, atque insuper diaphragmati superjaceat pars altera PQFE. His positis, fluidoque jam moveri incipiente, quæritur velocitas aquæ per foramen D in aërem effluentis vel altitudo genitrix hujus velocitatis. Fig. 37.

Solutio.

Fuerit altitudo superficiei PQ supra foramen D $= x$, amplitudo foraminis D $= n$, alteriusque G $= m$. Perspicuum autem est *ascensum potentialem* cujusvis guttæ per G transfluentis nihil promovere effluxum per D, totumque impendi in motum aliquem excitandum intestinum, qui mox absorbetur sine alio effectu: necesse igitur est ut singulis momentis motus generetur novus in particulis foramen G transeuntibus, non minus atque in particulis per D effluentibus. Sed si *ascensus potentialis* guttulæ per D effluentis dicatur v, id est, si aqua exilire ponatur per D velocitate, cujus altitudo genitrix sit v, erit similis altitudo ratione guttulæ mole sua priori æqualis, per G eodem tempore transfluentis $\frac{nnv}{mm}$. Multiplicatis istis *ascensibus potentialibus* per massam, quam æqualem habent, quamque vocabo M, erit aggregatum productorum $= Mv + \frac{Mnnv}{mm}$. Et cum ob infinitam amplitudinem vasis alius motus non generetur, erit præfatum aggregatum (per *reg.* 2.) censendum æquale facto ex massa omnis aquæ in ejusdem *descensum actualem*. At vero si massa omnis aquæ dicatur μ, erit (per § 7. *Sect.* 3.) *descensus actualis*, qui fit dum guttula M effluit $= \frac{Mx}{\mu}$, ita ut productum commune sit $= Mx$. Igitur habetur

$$Mv + \frac{Mnnv}{mm} = Mx, \quad \text{sive} \quad v = \frac{mmx}{nn+mm}. \qquad \text{Q. E. F.}$$

Scholium I.

§. 5. Apparet ex isto exemplo, motum sine calculo differentiali determinari posse, cum figura vasis ubique amplissimi motum hunc mutare non potest. Interim difficile futurum non fuisset, consideratione quoque habita ad amplitudines vasis, fluxum definire, & solo brevitatis studio id vitavimus pariterque omittemus in sequentibus, nisi fortasse motus notabiliter à figura vasis varia mutetur, quod fieri potest in tubis satis amplis, sed iis longissimis, in quibus fluidum movetur, præsertim si motus determinandi sint oscillatorii. Imo vidimus in præcedente Sectione, si oscillationes sint valde parvæ in tubis profundissime submersis, tunc tantum abesse, ut ad solum foramen fundi sit attendendum, neglectis amplitudinibus etiamsi satis magnis, quin potius ad has solas fere sit respiciendum.

Scholium 2.

§. 6. Quia in calculo, quem posuimus, *vis viva* cujusvis guttulæ per G transfluentis ab aqua cavitatis inferioris absorberi debet, perspicuum est, propositionem non esse extendendam ad illos casus, qui hypothesi repugnent, veluti cum diaphragma E F fundo C R proximum est simulque foramina sibi directe respondent: ita enim non arduum est providere, motum longe diversum fore ab eo, quem præsens theoria indicat. At vero, si distantia D G magna sit, sique simul foraminum situs sit obliquus & latera foraminum venis aqueis negent contractionem; dubium nullum est, quin theoria accurate omnibus phænomenis respondeat.

Corollarium.

§. 7. Si foramen G est admodum amplum præ altero, fit fere $v = x$, sed hæc altitudo v, cui nimirum respondet velocitas aquæ per D effluentis, non parum decrescit, crescente foramine D, ita ut si fuerit *v. gr.* duplum foraminis G, fit $v = \frac{1}{5}x$ & tantum non tota evanescat, cum foramen G est valde exiguum respectu foraminis D.

His ita inventis, jam quivis veram perspiciet rationem motuum illorum, quos Mariottus primus observavit, & quibus ceu valde *admirabilibus* testatur se supra modum fuisse delectatum, simulque intelliget, quam longe Auctor iste in reliquis perspicacissimus à viâ aberraverit in hisce disquisitionibus. Non abs re fore puto observata Mariotti hic apponere.

Fig. 38. §. 8. Vas adhibuit, quale repræsentat Figura trigesima octava, quæ non

non differt à priori nisi in eo, quod in ima parte cylindro A B C tubus horizontalis M D insertus sit perforatus lumine D, per quod aquæ verticaliter exiliunt: Diaphragma vero E F in medio perforatum est lumine G ut antea: infra illud parvulum erat foramen K, ut facilius cavitas inferior aquis impleri posset, quo facto idem obturabatur, reliquumque vasis replebatur.

His ita præparatis, effluentibusque aquis per D, observavit Mariottus, mox illas ascendisse usque in I, deinde sensim imminuta velocitate usque in N & tandem, imminente depletione tota cavitatis superioris, A B F E usque in O, tuncque assumtis confestim novis viribus assiliviſſe fere usque in F. Animadvertit etiam, si bene memini, altitudinem jactus initialis eo minorem esse, quo minus sit foramen G, ratione alterius D. Videatur ejus *tract. de motu aquarum part. IV. disc. 1.* Putat autem horum motuum mutationes explicari posse fingendo vasi A B F E amplissimo tubum strictiorem adhærere G L M D, per quem aquæ fluant. At vero demonstravimus & experientia quotidie docet, motum aquarum ex vase A B G L M D admodum diversum esse ab eo, qui modo indicatus fuit. Non minus falleretur si quis putaret aquam eadem velocitate exilire per foramen D, quasi illud in diaphragmate E F positum esset, nam fieri potest, ut altitudo jactus initialis sit major & minor altitudine F B. Nec denique ea effluent aquæ quantitate, uti facile quis suspicari posset, qua eodem tempore effluerent ex vase superiori simplici rescissa parte E F D C quamvis ita proxime se res habeat, cum foramen G admodum minus est foramine D.

§ 9. Nostra vero æquatio, nempe $v = \frac{mmx}{nn + mm}$, recte omnino respondet phænomenis: indicat enim aquam mox ab initio fluxus ad certam ascendere altitudinem, eamque tanto minorem, quanto minus est foramen diaphragmatis præ foramine altero; dein istum ascensum sensim diminui, donec aqua omnis ex cavitate superiori effluxerit, quo ipso momento protinus augmentum capit, totamque aquæ superincumbentis altitudinem tantum non attingit, quia tunc ex vase simplici eoque infinite amplo effluere censendæ sunt aquæ: paulisper tamen etiamnum retardantur aquæ à transitu aëris per foramen G, & sane notabiliter retardantur, cum foramen superius valde parvum est, de quo argumento mox quædam dicemus, cum de fluidis heterogeneis sermo erit. Si figura Mariotti debita proportione respondeat argumento instituto, oportet, ut foramen G alterius fecerit paullo plusquam dimidium.

§. 10. Indicat porro formula noſtra, quod multis fortaſſe nondum perſpectâ hâc theoriâ ſatis paradoxum videri potuiſſet, ſitum diaphragmatis E F ſive altiorem ſive humiliorem nullo modo mutare impetum ſive velocitatem aquæ effluentis; ratio autem iſtius phænomeni omnibus nunc, puto, manifeſta eſt.

§. 11. Jam vero examinabimus inſuper motum aquarum, cum plura ſunt diaphragmata foraminibus pertuſa, per quæ aquæ tranſire cogantur, ut effluxus per foramen D fieri poſſit. Poterit id eodem abſolvi modo, quo uſi ſumus in problemate §. 4. Ita autem inſtituto recte calculo retentisque denominationibus ibidem adhibitis apparebit eſſe

$$v = x : \left(1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\beta\beta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \&c.\right)$$

ubi per α, β, γ &c. intelliguntur amplitudines foraminum, quæ ſunt in diaphragmatibus, dum n exprimit ut antea amplitudinem foraminis D, per quod aquæ effluunt.

§. 12. Si proinde loco unius diaphragmatis ſint in ſimili vaſe, quale
Fig. 39. (Fig. 39.) repræſentat, plura diaphragmata veluti in B, C, R &c. per quæ aqua transfluat, dum per infimum foramen D effluit, mutabitur & augebitur confeſtim velocitas aquæ effluentis, quoties aliqua cavitas depletur: talis autem eſſe poteſt proportio inter altitudines A B, B C, C R, R E &c. atque amplitudines foraminum D, G, F, H &c. ut ſemper, quoties nova depleri incipit concameratio, vena effluens ad eandem altitudinem O aſſurgat, ſeu eadem velocitate effluat. Id vero obtinetur (deſignatis amplitudinibus foraminum D, G, F, H &c. per n, α, β, γ, &c.) faciendo

$$BC = \frac{nn}{\alpha\alpha} AB;\ CR = \frac{nn}{\beta\beta} AB;\ RE = \frac{nn}{\gamma\gamma} AB \ \&c.$$

ita ut poſitis foraminibus inter ſe æqualibus ſint pariter lineæ AB, BC, CR, RE &c. inter ſe æquales faciendæ. Facile quoque erit in vaſe cylindrico eam conciliare foraminibus magnitudinem, ut ſuperficies fluidi eodem tempore ab uno diaphragmate ad ſubſequens quodcunque deſcendat, & cum hæc diaphragmata æqualiter à ſe invicem & à fundo diſtant, uniformis clepſydrarum ſtructura excogitari poteſt.

§. 13. Si vero omnia diaphragmata altiſſime poſita ſint, jucundus erit luſus

lusus hydraulicus, venam profilientem D O videre, quæ æqualibus incrementis æqualibusque temporum intervallis, quod utrumque fieri potest, subsultim crescat.

§. 14. Propositum nunc sit motum fluidi exilientis indagare, cum per singula foramina alia atque alia fluida transfluunt. Fluida autem leviora continue ponenda esse apparet, quo sunt altius posita, ne motus turbetur, quod fit cum eodem tempore fluidum inferius ascendit, superiore descendente, per commune foramen. Innotescet hoc modo quisnam sit motus in aquis ex vase effluentibus undique clauso præter foraminulum aliquod superne existens, quod aëri transitum concedit. Hypothesin vero infinitæ vasis cylindrici amplitudinis ratione foraminum retinebimus, atque porro gravitatem specificam fluidi per D exilientis designabimus per A, illiusque quod per G transfluit notabimus littera B, similiterque gravitates specificas fluidorum per foramina, F, H, &c. fluentium indicabimus respective litteris C, D, &c. Denique cum etiam considerandæ hic sint altitudines diversorum fluidorum, quorum quidem, ob figuram vasis cylindricam solum infimum effluens altitudinem mutat, vocabimus x altitudinem fluidi infimi supra foramen D, fluidorum reliquorum, eo quo sibi superincumbunt ordine, altitudines designabimus respective per b, c, d &c. reliquas denominationes paragraphi undecimi retinebimus; quibus ita præparatis computus instituetur ut §. 4. factum est, neque enim quicquam aliud insuper observandum est, quam ut massæ guttularum iisdem tempusculis per diversa foramina transeuntium non simpliciter ex mole, sed etiam ex gravitate specificia æstimentur: *descensus* autem *actualis* pro singulis fluidis erit seorsim sumendus: Hisce vestigiis insistendo reperitur talis primo æquatio

$$Av + \frac{nn}{\alpha\alpha}Bv + \frac{nn}{\epsilon\epsilon}Cv + \frac{nn}{\gamma\gamma}Dv + \&c. = Ax + Bb + Cc + Dd, + \&c.$$

quæ reducta dat

$$v = (Ax + Bb + Cc + Dd + \&c.) : (A + \frac{nn}{\alpha\alpha}B + \frac{nn}{\epsilon\epsilon}C + \frac{nn}{\gamma\gamma}D + \&c.)$$

§. 15. Si duo sint liquores, erunt duo termini tam in numeratore quam in denominatore sumendi & tres termini cum tres fuerint liquores, atque sic porro: Si proinde liquor effluens sit, v. gr. mercurius, ipsique superincumbat aqua statuanturque gravitates specificæ horum liquorum ut 14. ad 1. fiet

$v =$

$$v = \frac{14x+b}{14+\frac{nn}{aa}}$$

atque si ratio foraminum D & G fuerit ex gr. ut 3 ad 1, fiet

$$v = \frac{14x+b}{23}$$

§. 16. Patet quoque ratiocinium istud non excludere eos casus, quibus fluida superiora sunt inferioribus specifice graviora, modo fluida inferiora non ascendant per eadem foramina, per quæ superiora descendunt: neque vero id futurum esse præsumo (nec tamen affirmo) cum loco simplicis foraminis tubulus sit quamvis exiguæ altitudinis, per quem liquor superior descendat in inferiorem cavitatem, veluti in fig. 40. ubi quidem duo tantum liquores considerantur.

Hic autem altitudo C R variabilis est, & altitudo A C constans; interim tamen uniformitatis litterarum gratia vocabimus altitudinem A C $= x$, alteram C R $= b$; gravitatem specificam fluidi per D erumpentis faciemus rursus $= A$, alteriusque fluidi per G transeuntis $= B$, & erit altitudo D O seu

$$v = \frac{Ax+Bb}{A+\frac{nn}{aa}B}$$

Igitur si per foramina D & G respective fluant aqua & mercurius erit nunc

$$v = \frac{x+14b}{1+\frac{14nn}{aa}}.$$

§. 17. Ut porro innotescat motus fluidi simplicis ex vase superne parvulo foramine aërem admittente, observandum est, nullam hic altitudinem esse b; quia aër utrique orificio incumbere ad eandem altitudinem censeri potest, erit proinde

$$v = \frac{Ax}{A+\frac{nn}{aa}B}$$

atque si fuerit $\frac{A}{B} = 850$, quæ præterpropter solet esse proportio inter gravitates specificas aquæ & aëris, erit

$$v = \frac{850x}{850+\frac{nn}{aa}};$$

§. 18.

§. 18. Omnia hæc principia, quæ hactenus adhibuimus, facile ut jam dixi extenduntur ad vasa, quæ finitam ratione foraminum habent amplitudinem; Potest autem eorum veritas alio etiam modo admodum diverso evinci, uti ostendam, cum ad *hydraulico-staticam* pervenero, quia altero illo demonstrandi modo pressiones fluidorum in singulis vasis partibus magis fiunt perspicuæ; differunt autem horum fluidorum regulæ staticæ vehementer à legibus, quæ fluidis stagnantibus debentur.

Cæterum habent hæc suam utilitatem ad machinas hydraulicas recte perspiciendas; neque enim satis ad hæc attenti fuisse videntur artifices: dabitur autem occasio de iis uberius differendi in sequenti sectione, ubi calculum ponemus, quantum vis in propellendis aquis adhibitæ perdatur à transitu aquæ per plura foramina, ostensuri simul remedia adhibenda, ut illud virium detrimentum, quantum fieri potest, diminuatur. Prius vero alia quædam vasa composita in hâc Sectione considerabimus, quam ad hæc descendamus.

§. 19. Fit aliquando, ut vasa juxta se posita aquas unum ex altero recipiant effluxuras demum ex ultimo. Hosce vero motus jam exemplo illustrabimus.

Propositum fuerit vas cujuscunque formæ A G M B (Fig. 41.) quod Fig. 41.
nova aquarum affusione constanter plenum conservatur usque in A B. Ex eodem interim vase fluidum transire intelligatur per foramen M in aliud vas contiguum B M N C & ex hoc rursus in aliud C N R D per foramen N & sic porro, donec tandem aquæ in aërem ejiciantur, quæranturque loca superficierum H L, P Q, &c. postquam fuerunt ad statum *permanentiæ* reducta. Quæstio autem sic solvetur.

Perspicuum nempe est ex eo, quod superficies A B, H L, P Q, &c. in eodem loco permanent, aquas iis transire per foramina M, N, R velocitatibus, quæ debeantur altitudinibus B H, L P, Q R, si modo transitus aquarum per unum foramen non acceleret earundem fluxum per foramen proximum, quod certe non fiet, nisi expresse opera detur, ut id aliquantum fiat. Præterea vero considerandum est, velocitates aquarum per foramina transfluentium reciproce esse foraminibus proportionales, quia in statu *permanentiæ* eodem tempore eædem aquarum quantitates per singula foramina trajiciuntur. Ex istis intelligitur, designanatis amplitudinibus foraminum M, N, R, per m, n, p, fore LP $= \frac{mm}{nn} \times BH$; QR $= \frac{mm}{pp} \times BH$: Est vero BH + LP + QR æqualis altitudini superficiei AB supra foramen ultimum R seu DR; erit igitur

$$BH + \frac{mm}{nn} \times BH + \frac{mm}{pp} \times BH = DR,$$

& proinde $BH = DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right)$; pariterque

$$LP = \frac{mm}{nn} \times DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right) \text{ atque}$$

$$QR = \frac{mm}{pp} \times DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right), \text{ seu}$$

$$BH = DR : \left(1 + \frac{mm}{nn} + \frac{mm}{pp}\right)$$

$$LP = DR : \left(1 + \frac{nn}{mm} + \frac{nn}{pp}\right)$$

$$QR = DR : \left(1 + \frac{pp}{nn} + \frac{pp}{mm}\right)$$

atque sic determinantur situs invariabiles superficierum HL, PQ, &c. At quanto tempore id fiat, si aliter superficies illæ sint positæ & quænam interea aquæ quantitas per singula foramina fluat, inferius examinabimus unà cum aliis quæstionibus eo pertinentibus: Jam vero ex allatis valoribus altitudinum BH, LP, QR &c. præcipuas affectiones deducemus.

§. 20. I. Cum singula foramina sunt inter se æque ampla, erit BH = LP = QR &c. & quævis istarum altitudinum toties continebitur in altitudine DR, quoties vasa replicantur.

II. Si vero aliquod foraminum sit infinite parvum ratione reliquorum, erunt omnes superficies, quæ sunt cis foramen positæ, in eadem altitudine cum prima superficie AB: reliquæ autem fundo GR erunt proximæ.

III. Si canalis fingatur continuus per singula foramina M, N, R &c. transiens, intelligitur, aquam per orificium canalis effluere debere velocitate, quæ debeatur toti altitudini DR. In nostro vero casu ea velocitas respondet tantum altitudini QR, cujus rei ratio & origo est, quod *ascensus potentialis* singularum guttularum per foramina, excepto solo foramine effluxus, transfluentium

tium absforbeatur. Igitur vis viva quæ singulis momentis perditur est ad vim vivam quæ singulis momentis generatur, ut D Q ad D R. Altitudines vero B H, L P, &c. repræsentant *respective* vim vivam, quæ continue guttulis per foramina M, N transfluentibus separatim demitur. Puto tamen si foramina fuerint fere æqualia, eorumque centra in rectam lineam posita, ac denique parietes B M, C N, D R non admodum à se invicem remoti sint, fieri posse, ut aliquanto majori velocitate aquæ erumpant, quam theoria ista indicat: In reliquis casibus non dubito de ejusdem accuratione, abstrahendo animum ab impedimentis sæpe indicatis.

IV. Denique perspicuum est, quoties superficies aquæ H L, P Q &c. situm suum mutant sive plures, sive una sola, mox omnes superficies loca mutaturas esse, donec eo quo dictum fuit modo fuerint ad æquilibrium repositæ. Mutationes autem istas generaliter definire nodosi æque ac prolixi est calculi, nisi vasa ponantur prismatica & infinitæ quasi amplitudinis ratione foraminum, ut nempe incrementa *ascensuum potentialium* aquarum M L, N Q &c. quæ locum mutant, negligi possint ratione *ascensuum potentialium*, qui in guttulis per M, N, R transfluentibus perpetuo generantur. Neque profecto restrictio hæc afficere nos debet, cum passim jam viderimus in vasis vel mediocriter admodum amplis posse sine sensibili errore incrementa motus massarum internarum rejici in calculo. Omittam igitur solutionem generalem, quæ mihi est, ob nimiam ejus prolixitatem, atque ut in hâc sectione adhuc feci, vasa ceu infinite ampla & quidem ad majorem concinnitatem prismatica ponam. Incipiam autem à vase bifido.

§. 21. Repræsentatur hujusmodi vas bifidum (Fig. 42.) cujus pars A M aquis plena, altera B N saltem usque ad H L repleta ponitur, cum jam fluxus per utrumque orificium M & N incipit: affundanturque aquæ in A B, ut vas constanter plenum servetur, sic autem fiet, ut aquæ in B N assurgant (aut etiam descendant pro rerum circumstantiis) quod cum ita sit, quæremus velocitatem superficiei aqueæ, cum perveniet in situm $b\,l$. Fig. 42.

Hunc in finem exprimemus amplitudinem orificii M per m, orificii N per n & amplitudinem $b\,l$ (quæ quidem ubique eadem ponitur) per g. Deinde ponemus $BM = a$, $HM = b$, $Bb = x$, atque proinde $bM = a - x$. Sic vero patet ex positione infinitæ veluti vasorum A M & B N amplitudinis,

 cum

cum superficies aquæ variabilis est in bl, fore altitudinem debitam velocitati aquæ per M transfluentis $= Bb = x$, velocitatemque ipsam $= \sqrt{x}$, similemque altitudinem ratione orificii $N = bM = a - x$, atque velocitatem aquæ per N transfluentis $= \sqrt{a-x}$; est igitur quantitas dato tempusculo per M in vas B N influentis ad quantitatem eodem tempusculo ex vase effluentis ut $m\sqrt{x}$ ad $n\sqrt{a-x}$, harumque quantitatum differentia divisa per amplitudinem g dat velocitatem superficiei bl, quæ proinde velocitas, quam vocabimus v, exprimetur hâc æquatione,

$$v = \frac{m\sqrt{x} - n\sqrt{a-x}}{g}$$

§. 22. Ut jam innotescat tempus, quo superficies fluidi ex H L venit in bl, vocabimus illud tempus t: quia autem est $dt = \frac{-dx}{v}$, erit, posito pro v valore modo invento,

$$dt = \frac{-g\,dx}{m\sqrt{x} - n\sqrt{a-x}}$$

Potest quidem hæc formula immediate rationalis fieri ponendo $x = \frac{4aqq}{(1+qq)^2}$, atque deinde debito modo construi: Ista vero methodus paullo prolixior est hâc altera, qua quantitas reducenda dividitur in duo membra seorsim integranda, nempe præmissa æquatio non differt ab hâc:

$$dt = \frac{mg\,dx\sqrt{x}}{nna - (mm+nn)x} + \frac{ng\,dx\sqrt{a-x}}{nna - (mm+nn)x}:$$

Et autem $\int \frac{mg\,dx\sqrt{x}}{nna - (mm+nn)x} = -\frac{2mg}{mm+nn}\sqrt{x} + \frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\sqrt{(mm+nn)}} \times$ $\log.\frac{n\sqrt{a} + \sqrt{mm+nn}\,\sqrt{x}}{n\sqrt{a} - \sqrt{mm+nn}\,\sqrt{x}}$; alteriusque membri integrale nempe $\int \frac{ng\,dx\sqrt{a-x}}{nna - (mm+nn)x}$ fit $= \frac{-2ng}{mm+nn}\sqrt{(a-x)} +$ $\frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\times\sqrt{(mm+nn)}}\log.\frac{m\sqrt{a} + \sqrt{mm+nn}\times\sqrt{a-x}}{m\sqrt{a} - \sqrt{mm+nn}\times\sqrt{a-x}}$;

Patet exinde addita debita constante fore

$$t = \frac{2mg\sqrt{a-b} - 2mg\sqrt{x} + 2ng\sqrt{b} - 2ng\sqrt{a-x}}{mm+nn} +$$

$$\frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\times\sqrt{(mm+nn)}} \times$$ log.

$$\log.\frac{mna+(mm+nn)\times\sqrt{(ax-xx)}+m\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{ax}+n\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{(aa-ax)}}{mna+(mm+nn)\times\sqrt{(ax-xx)}-m\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{ax}-n\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{(aa-ax)}}$$

$$-\frac{mng\sqrt{a}}{(mm+nn)\times\sqrt{(mm+nn)}}\times$$

$$\log.\frac{mna+(mm+nn)\times\sqrt{(ab-bb)}+m\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{(aa-ab)}+n\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{ab}}{mna+(mm+nn)\times\sqrt{(ab-bb)}-m\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{(aa-ab)}-n\sqrt{(mm+nn)}\sqrt{ab}}.$$

§. 23. Ex paragrapho 19. liquet ſuperficiem bl in ſitu ſuo permanere cum eſt Bb $(=x)=\frac{nna}{mm+nn}$. At vero ſi in æquatione integrata præcedentis paragraphi ponitur $x=\frac{nna}{mm+nn}$, fit denominator in quantitate logarithmicali $=o$, ipſaque proinde quantitas infinita: tempus igitur totius motus infinities majus eſt, quam cujuscunque partis.

Sed ut alium inſuper caſum determinemus, videbimus quanto tempore ſuperficies aquæ ex infimo ſitu M N (poſito nempe $b=o$) aſcendat quantitate $\frac{1}{2}a$, poſito $m:n=4:3$. fit autem

$$t=\frac{8g\sqrt{a}-14g\sqrt{\frac{1}{2}a}}{25}+\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.\left(\frac{49+35\sqrt{2}}{49-35\sqrt{2}}\right)-\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.-4,\text{ ſeu}$$

$$t=\frac{8g\sqrt{a}-7g\sqrt{2a}}{25}+\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.\left(\frac{49+35\sqrt{2}}{140\sqrt{2}-196}\right),$$

id eſt, proxime $t=\frac{158}{100}\times2\sqrt{a}$, quod indicat, eſſe tempus iſtud ad tempus quo grave libere cadit per altitudinem B M proxime ut 158 ad 100: Pariter tempus deſcenſus invenitur, ſi ab initio ſuperficies bl fuerit ultra ſitum æquilibrii poſita. Fuerit v. gr. utrumque vas aquis totum repletum, orificia autem M & N rationem nunc habeant quæ eſt inter 3 & 4, ſitque tempus determinandum, quo ſuperficies ex B deſcendat per dimidiam B M: hypotheſes hæ faciunt $m=3$; $n=4$; $b=a$, atque $x=\frac{1}{2}a$, ita vero fit

$$t=\frac{8g\sqrt{a}-7g\sqrt{2a}}{25}+\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.\left(\frac{49+35\sqrt{2}}{49-35\sqrt{2}}\right)-\frac{12g\sqrt{a}}{125}\log.-4.$$

Ex quo apparet in utroque exemplo idem eſſe tempus.

§. 24. Priusquam deſcendamus ad vaſa multifida indagaſſe conveniet, quænam aquæ quantitas per utrumque orificium M & N fluat, dum ſuperficies aquæ ex ſitu H L venit in bl. Et primo quidem, quod ad orificium M

 per-

pertinet, perſpicuum eſt quantitatem aquæ dato tempuſculo (dt) per illud transfluentem proportionalem eſſe velocitati ($\surd x$) ductæ in magnitudinem orificii (m) ipſumque tempuſculum dt, ita ut hæc quantitas ſit

$$\left(\text{ob } dt = \frac{-g\,dx}{m\surd x - n\surd(a-x)} \text{ per §. 22.}\right) = \frac{-mg\,dx\surd x}{m\surd x - n\surd(a-x)},$$

atque proinde omnis quantitas quæ ab initio effluxerit

$$= -\int\frac{mg\,dx\surd x}{m\surd x - n\surd(a-x)}. \text{ Eſt autem } -\int\frac{mg\,dx\surd x}{m\surd x - n\surd(a-x)} =$$

$$\frac{mnga}{(m+n)^2}\,\log.\left(\frac{ma-mb-nb}{mx+nx-na}\right) + \frac{mg}{m+n} \times (a-b-x).$$

Eodem modo eruitur quantitas aquæ interea per orificium N effluentis (quæ ſcilicet eſt $= -\int\frac{ng\,dx\surd(a-x)}{m\surd x - n\surd(a-x)}$) $=$

$$\frac{mnga}{(m+n)^2}\,\log.\left(\frac{ma-mb-nb}{mx+nx-na}\right) - \frac{ng}{m+n} \times (a-b-x).$$

Atque inde etiam innoteſcit quantitas aquæ, quæ in AB affunditur, neque enim differt ab illa, quæ per M transfluit: aqua denique in vaſe BN collecta exprimitur per $g\ (a-b-x,)$ & cum differentia ſumitur aquarum per M & N transfluentium, oritur eadem iſta quantitas $g\,(a-b-x)$.

§. 25. Prouti §. 21. velocitatem ſuperficiei locum continue mutantis determinavimus pro vaſe bifido, ita nunc in vaſis multifidis velocitates ſingularum ſuperficierum definiemus. Fuerit nempe altitudo ſuperficiei ſupremæ ſupra proximam $= x$, altitudo hujus ſupra ſequentem $= y$, deinde $= z$, rurſusque altitudo proxima $= s$, & ſic porro. Amplitudines vero orificiorum deſignentur per m, n, p, q. &c. amplitudines vaſis ſecundi, tertii, quarti &c. ſint M, N, P. &c. Sic patet fore velocitatem ſuperficiei ſecundæ $= \frac{m\surd x - n\surd y}{M}$; veloc. ſuperf. tert. $= \frac{n\surd y - p\surd z}{N}$; velocit. ſuperfic. quartæ $= \frac{p\surd z - q\surd s}{P}$ &c.

Porro cum ſpatiola iiſdem tempuſculis à ſuperficiebus percurſa ſint ut velocitates, apparet ſic ſingulis momentis determinari ſitus iſtarum ſuperficierum, quamvis æquationes ſint intractabiles fere. Id ex ſe patet, ſi vel unica ca superficies extra situm æquilibrii, supra §. 19. definiti posita fuerit, fore ut omnes reliquæ motibus reciprocis agitentur, donec post tempus infinitum in pristinum situm redierint simul.

§. 26. Sit porro vas ita formatum, ut ostendit Fig. 43. divisum scilicet in duas partes A B E G & L Q N E inter se, mediante foramine M communicantes; sintque præterea foramina H & N per quæ aquæ exiliant, dum in A B totidem affunduntur. Sint autem amplitudines in utroque vase veluti infinite amplæ ratione foraminum M, H & N; Hisque positis propositum sit velocitates invenire, quibus aquæ tam per H, quam per N ejiciantur seu altitudines istis velocitatibus debitas. Erunt autem velocitates invariabiles, quia vas aquis plenum conservatur, simulque vasis amplitudines respectu foraminum infinitæ censentur. Fig. 43.

Solutio istius problematis ex præcedentibus facile colligetur, si modo concipiatur foramen M in duas divisum partes o & p, quarum altera o aquas foramini H, altera p foramini N mittat: partes autem o & p (quia per utramque eadem fluunt velocitate aquæ) eam habebunt rationem, quam inter se habent quantitates aquarum eodem tempore per H & N effluentium, id est rationem compositam ex ratione amplitudinis H ad amplitudinem N & velocitatis in H ad velocitatem in N. Quibus præmonitis perspicuum est, si amplitudines foraminum M, H & N indicentur per α, β, γ, altitudines autem velocitatibus in H & N debitæ designentur per x & y, ipsæque proinde velocitates per $\sqrt{x}$ & $\sqrt{y}$ fore amplitudinem $o = \frac{\beta\sqrt{x}}{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}\alpha$ & amplitudinem $p = \frac{\gamma\sqrt{y}}{\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y}}\alpha$.

Ponatur nunc altitudo superficiei A B supra orificium H $= a$, & habebitur x, ut demonstratum fuit §. 4. si quadratum foraminis o dividatur per summam quadratorum foraminum o & H & quod oritur multiplicetur per a; sic igitur fit $x = \frac{\alpha\alpha a x}{\alpha\alpha x + (\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2}$, ex quo oritur hæc æquatio

$$(A)\quad \alpha\alpha x + (\beta\sqrt{x}+\gamma\sqrt{y})^2 = \alpha\alpha a.$$

Eodem modo ratione foraminum p & N, posita altitudine A B supra N $= a + b$, obtinetur hæc altera æquatio:

$$(B)\ \alpha\alpha y + (\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y})^2 = \alpha\alpha \times (a+b).$$

Subtractâ æquatione (B) ab æquatione (A) prodit $y = x + b$, ex quo ſequitur, ſi venæ ambæ verticaliter ſurſum dirigantur, utramque ad eundem locum aſſilire. Deinde ſi in æquatione (A) ſubſtituatur pro y valor ejus $x+b$, erit

$$(C)\ \alpha\alpha x + (\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{x+b})^2 = \alpha\alpha a,$$

unde deducitur valor ipſius x æquatione quadrata.

§. 27. Ex præcedentis paragraphi æquationibus ſequentes fluunt affectiones.

I. Quia velocitas aquæ per M transfluentis eſt $= \frac{\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y}}{\alpha}$, erit altitudo generans hanc velocitatem $= \left(\frac{\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y}}{\alpha}\right)^2$; ſed ſi addantur æquationes (A) & (B) fit:

$$\left(\frac{\beta\sqrt{x} + \gamma\sqrt{y}}{\alpha}\right)^2 = \frac{2a + b - x - y}{2} = \text{ob } (y = x + b)\ a - x.$$

II. Si foramen H ſit valde exiguum ratione foraminum M & N, id eſt, ſi β poſſit cenſeri nulla ratione α & γ, abit æquatio (C) in hanc

$$\alpha\alpha x + \gamma\gamma x + \gamma\gamma b = \alpha\alpha a, \text{ ſeu}$$

$$x = \frac{\alpha\alpha a - \gamma\gamma b}{\alpha\alpha + \gamma\gamma};$$

Id vero egregie convenit cum paragrapho decimo nono, cum manifeſtum ſit aquam per foramen valde exiguum ad eandem altitudinem aſſilire, quam haberet aqua, ſi hæc laminam LQ tantum deorſum premat, quantum ab aqua interna ſurſum premitur; Iſta vero præfata altitudo vi paragraphi 19. eſt $\frac{\alpha\alpha a - \gamma\gamma b}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$; Eſt porro in iſta hypotheſi altitudo velocitatis aquarum in N

ſeu $$x + b = \frac{\alpha\alpha a + \alpha\alpha b}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$$

& denique altitudo velocitatis aquarum in M, ſeu

$$a - x = \frac{\gamma\gamma a + \gamma\gamma b}{\alpha\alpha + \gamma\gamma};$$

quæ poſteriores æquationes in iſto caſu particulari pariter ex §. 19. immediatè colligi aut præviderí potuiſſent.

III.

III. Si vero nunc alterum foramen N admodum exiguum præ ambobus reliquis ponatur, erit facto $\gamma = 0$

$$x = \frac{\alpha\alpha a}{\alpha\alpha + \zeta\zeta}; \quad \text{deinde}$$

$$x + b = \frac{\alpha\alpha a + \alpha\alpha b + \zeta\zeta b}{\alpha\alpha + \zeta\zeta}, \quad \&$$

$$a - x = \frac{\zeta\zeta a}{\alpha\alpha + \zeta\zeta}.$$

IV. Si $\gamma\gamma b = \alpha\alpha a$, fit $x = 0$. Nullam igitur in hoc casu pressionem sustinent partes laminæ L Q: imo inferiora versus premitur, si γ sit majus quam $\frac{\alpha\alpha a}{b}$, & lamina nullibi sit perforata.

Ista vero omnia similiter ex §. 19. facile colliguntur.

V. Ita quoque ope ejusdem paragraphi sine calculo novo prævideri potuisset, quid fieri debeat, cum positis foraminibus H & N in eadem altitudine summa foraminum eorum, ceu unicum amplitudinis $\zeta + \gamma$ considerari potest: Indicant nempe tam §. 19. quam §. 26. esse

$$x = \frac{\alpha\alpha a}{\alpha\alpha + (\zeta + \gamma)^2},$$

VI. Notari etiam potest, cum valor ipsius x sit imaginarius, id provenire ex eo, quod aquæ non solum non effluant, in aliquibus casibus per H, sed quod superficies L Q etiam descendat; unde fieri potest, ut infra orificium M descendat, quo ipso cessat aquarum contiguitas contra hypothesin propositionis. Si autem valor x est realis, tum dupliciter exprimitur, sed alter valor inutilis est reputandus; sic igitur cavendum ne præpostera radix ceu utilis assumatur.

VII. Denique ut casum specialissimum attingamus, ponemus omnia foramina inter se æqualia, & prodibit $5xx + (2b - 6a)x = -aa + 2ab - bb$, seu $x = \frac{3a - b - 2\sqrt{(aa + ab - bb)}}{5}$; atque si fuerit præterea $a = 3b$, erit $x =$ (proxime) $\frac{4}{15}b$, deinde altitudo velocitatis in foramine N seu $x + b = \frac{19}{15}b$ atque altitudo velocitati in M debita seu $a - x = \frac{41}{15}b$. Sunt itaque velocitates seu etiam, quia foramina æqualia sunt, quantitates aqua-

aquarum iisdem temporibus per foramina M, H & N transfluentium proxime ut $\sqrt{41.2}$ & $\sqrt{19}$.

§. 28. Ex his omnibus patet methodus determinandi motum in fluidis tum etiam, cum quantitas *virium vivarum* non conservatur; & simili modo semper absolvetur computus, quoties ex natura subjectæ quæstionis præsumi potest (uti in quæstionibus hujus sectionis accurate potuit) quantum *vis viva* singulis momentis inutilis ad motum determinandum evanescat. Neque enim soli sunt casus, quos adhuc examinavimus: lubet itaque alium addere, qui oscillationes fluidorum spectat, ut innotescat quantum inde decrementum excursiones fluidi capiant.

Fig. 44. Sint duo tubi amplitudine æquales & cylindrici AL & BH (Fig. 44.) verticaliter inserti vasi amplissimo horizontali A B O P. Sit vas istud totum aqua repletum: tubi autem aquam habeant usque in C & F; deinde sublato æquilibrio hæreat altera superficies in G altera in E; moxque aqua sibi relicta moveri incipiat. His positis tantum deberet superficies G descendere infra locum C, alteraque superficies E ascendere supra F, quanta est altitudo G C seu E F si omnis *vis viva* conservaretur (ab impedimentis frictionum aliisque similibus nunc animum abstrahimus): Verum patet, *vim vivam* omnis aquæ per A in vas horizontale fluentis absumi sine alio effectu ab aqua ibidem stagnante, indeque sequitur descensum superficiei G alteriusque ascensum minorem fore, quam modo dictum fuit: id igitur decrementum nunc explorabimus.

Ponatur ad hunc finem superficiem ex G pervenisse in M, ponaturque $GM = x$, $GC = b$, $CA = a$: erit $BE = a - b$, $EN = x$; $MC = FN = b - x$; Deinde fiat altitudo debita velocitati superficiei in $M = v$, in situ proximo $m = v + dv$; eritque incrementum *vis vivæ* aquæ (dum superficies percurrunt elementa Mm, Nn, seu dx) $= 2adv$, cui addenda est *vis viva* guttulæ, quæ ab aqua vasis horizontalis absumitur, nempe vdx, & erit summa $2adv + vdx$ æqualis *descensui actuali* aquæ multiplicato per massam aquæ, quod productum est æquale *descensui actuali* guttulæ dx, multiplicato per $2b - 2x$. Est igitur

$$2adv + vdx = 2bdx - 2xdx.$$

Hæc vero æquatio recte integrata abit in hanc

$v =$

$$v = 4a + 2b - 2x - c^{\frac{-x}{2a}} \times (2b + 4a)$$

unde si ponatur $4a + 2b - 2x - c^{\frac{-x}{2a}} \times (2b + 4a) = o$, dabit valor ipsius x totam excursionem, à qua si auferatur b, residuum indicabit descensum infra punctum æquilibrii C.

§. 29. Ut vero exemplo quodam appareat, quantum hâc ratione oscillationes diminuantur, ponemus $a = b$, facta scilicet C A = G C & B E = o. Ita oritur

$$3a - x = c^{\frac{-x}{2a}} \times (3a) \text{ sive}$$

$$c^{\frac{x}{2a}} = \frac{3a}{3a - x} \text{ vel } x = 2a \, log. \frac{3a}{3a - x},$$

cui æquationi prope admodum satisfacit valor $x = \frac{7}{4}a$. Est igitur decrementum excursionis seu $a - b$ = quartæ parti elevationis fluidi supra punctum medium: si majus observetur experimento, reliquum adhæsioni aquæ ad latera tuborum tribuendum erit.

§. 30. Neque ista diminutarum excursionum ratio plane, ut suspicor, auferetur, si vel æqualis fiat amplitudinis tubus horizontalis cum verticalibus, ob mutatam fluidi directionem in punctis A & B.

Cæterum infiniti alii fingi possent casus iisdem principiis solvendi, veluti si natura oscillationum indaganda sit in vase Fig. 44. cum id in parte horizontali diaphragmate in duas dispescitur partes solo lumine, quod diaphragma habeat, inter se communicantes & hujusmodi alii. Puto autem hæc jam sufficere, ut quisque sibi facile regulas generales pro istiusmodi quæstionibus solvendis formare possit.

EXPERIMENTA

Ad sectionem octavam pertinentia.

Experimentum I.

Paragraphum quartum, quo dicitur altitudinem velocitati aquæ per orificium D effluentis (Fig. 37.) esse $\frac{mmx}{nn + mm}$ eo confirmavi modo, ut

 utrum-

utrumque orificium G & D limbum haberet inſtar Zonulæ paullulum elevatum, ne contractioni venarum locus eſſet, tutumque fieri poſſet judicium à quantitate aquæ dato tempore effluentis ad velocitates. Deinde ſumtis accuratè menſuris, obſervavique tempore quo ſuperficies per datum ſpatium A P deſcenderet, vidi tempus illud recte reſpondere velocitatibus dicto paragrapho definitis: obſervavi etiam nihilo mutari motum ab elevatione aut depreſſione diaphragmatis. Reliqua ad experimentum pertinentia memoria exciderunt, neque ea in chartam conjeci: ſuperfluum autem duxi experimentum repetere, quod unicuique facile erit imitari: fundamentum autem id eſt reliquis, quæ adeoque ulteriori diſquiſitione experimentali vix opus habent: volui tamen ſequentia præterea tentare.

Experimentum 2.

Vaſe uſus ſum, quale fere adhibuit Mariottus (*vid.* fig. 38.) rurſusque confirmavi æquationem noſtram hunc in modum: feci ut aquæ per orificium D horizontaliter effluerent, tuncque menſuras cepi altitudinis orificii D ſupra pavimentum & diſtantiam loci, ubi vena in pavimentum incidebat à puncto in eodem pavimento, cui orificium D verticaliter imminebat; Inde cognovi altitudinem velocitati aquæ in D effluentis debitam: eandem autem hanc altitudinem experimento proxime inveneram, quam theoria hujus ſectionis indicat §. IV. Similia experimenta apponam in fine experimentorum ad ſectionem duodecimam pertinentium, quæ ſimul theoriam noſtram *hydraulico-ſtaticam* confirmabunt.

Denique cum multa ſint in §. §. 26. & 27. quæ ſingulari calculo eruta fuerunt, operæ pretium erit de illis quoque experimenta ſumere, præſertim cum alia ſimul eadem opera ſumi poterunt experimenta, quæ in *ſect.* XII. recenſebuntur, ſi vas, quale Fig. 43. ſiſtit, ad hunc finem fieri curetur.

Cæterum hæc theoria etiam confirmatur experimentis in *Sectione Septima* recenſitis, quæ de oſcillationibus fluidorum in tubos per foramina influentium ſumſi.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO NONA.

De motu fluidorum, quæ non proprio pondere, sed potentia aliena ejiciuntur, ubi præsertim de Machinis Hydraulicis earundemque ultimo qui dari potest perfectionis gradu, & quomodo mechanica tam solidorum quam fluidorum ulterius perfici possit.

§. I.

IN hâc sectione, qua Machinas examinare hydraulicas, usumque earum, quantum fieri potest, perficere potissimum constitui, animum abstrahemus à variationibus motus, quæ originem ducunt à potentia vel inertia fluidi interni, quia ut vidimus motus aquæ internæ tantum non æquabilis est à primo fere fluxus initio, si orificium exile sit, uti est in Machinis hydraulicis plerisque ratione amplitudinum internarum. Res enim foret ridicula in rebus practicis sollicitos esse de mutationibus, quæ primis fluxus momentis fiunt, quasque jam determinavimus in sectione quarta, quod ibi operæ pretium esse poterat ut omnis theoriæ vis inde elucesceret. Igitur durante toto motu, brevitatis gratiâ, ponemus aquam constanter velocitate expelli, quæ se habeat ut radix potentiæ internæ prementis, postquam hæc potentia ad pondus cylindri aquei foramini superincumbentis reducta fuerit: nam quæcunque fuerit ista potentia, considerandum erit pondus cylindri verticalis aquei superficiei aqueæ internæ superincumbentis, atque altitudo istius cylindri dabit altitudinem velocitati aquæ exilientis debitam, si modo nulla adsint obstacula extrinseca, & aqua ex vase amplissimo ejiciatur. Hoc ita intelligendum est, ut si operculum A B pondere P oneratum (Fig. 45.) aquam per orificium F expellat, pondus autem P æquale sit ponderi cylindri aquei H A B I, tunc vena aquea F G altitudinem H I attingere debeat. Fig. 45.

Definitiones.

§. 2. Per *potentiam moventem* deinceps intelligam principium illud agens, quod consistit in pondere, pressione animata aliisve hujuscemodi viribus, uti dicuntur, mortuis.

Productum autem quod oritur à multiplicatione *potentiæ* istius *moventis* per ejusdem velocitatem æque ac tempus durante quo pressionem suam exerit, designabo per *potentiam absolutam*. Vel quia productum ex velocitate & tempore proportionale est simpliciter spatio percurso, licebit etiam *potentiam absolutam* colligere ex *potentia movente* multiplicata per spatium, quod eadem percurrit. Id vero productum ideo voco *potentiam absolutam*, quia ex illo demum æstimandi sunt labores hominum operariorum in elevandis aquis exantlati, quod mox demonstratum dabo in regulis, quæ mihi in hanc rem observatæ fuerunt. Interim visæ mihi fuerunt machinæ hydraulicæ commode se reduci pati ad duo genera, quorum alterum aquas cum impetu ejicit, alterum de loco in locum placide veluti transportat. Utramque ordine suo pertractabo genus & denique sub finem quædam addam de diversis potentiis moventibus.

(A) *De machinis aquas cum impetu in altum projicientibus.*

Regula I.

§. 3. Labores hominum operariorum, qui machinis hydraulicis pro aquis elevandis apponuntur, æstimandi sunt ex *potentia absoluta*, id est, ex *potentia movente* seu pressione quam exerunt, ex tempore & ex velocitate puncti, cui *potentia movens* applicatur.

Demonstratio.

(α) De *potentia movente* res est perspicua: labores enim cæteris omnibus paribus sunt utique proportionales numero operariorum seu *potentiæ moventi*. (β) Ratione temporis res est non minus manifesta ex omnium circumstantiarum replicatione, quæ ex duplicatione temporis oritur. (γ) Denique quod ad velocitatem attinet res ex eo est deducenda, quod sive *potentiam moventem* duplices, sive ejus velocitatem non diversus oriatur effectus,

nem-

nempe duplus ab utraque parte. Finge pondus P descensu suo aquam per orificium F ejicere ad altitudinem FG : deinde manentibus reliquis duplicatum puta orificium F, *& vides ad eandem altitudinem FG eodemque tempore duplam aquæ quantitatem ejectum iri ab eadem *potentia movente* P, sed ea duplo celerius descendente. Pariter quantitas aquæ manentibus reliquis duplicabitur, si & orificium F & amplitudinem AB & pondus seu *potent. movent.* P duplices, tunc vero velocitas hujus potentiæ duplicatæ invariata manet. Igitur utroque modo effectus geminatur. Q. E. D.

Scholium.

§. 4. Propositio præcedens non sensu physiologico sed morali est interpretanda: moraliter neque plus neque minus æstimo laborem hominis, qui eadem celeritate conatum duplum exercet, quam ejus qui eodem conatu celeritatem duplicat, quia nempe uterque eundem edit effectum, fieri tamen potest, ut alterius labor, quamvis altero non minus robusti, sensu physiologico sit admodum major. Si quis conatu 20. librarum singulis minutis primis spatium 200. *ped.* faciat, is facile conatum geminabit, difficillime vero velocitatem. Ex hoc consequens est in omni machinarum genere dispiciendum præsertim esse, quomodo debeant esse constitutæ, ut pro eodem tempore minima hominum defatigatione productum ex conatu eorum in velocitatem omnium maximum sit: atque exinde patebit, quænam in ergatis longitudo vectibus sit tribuenda, quantus in rotis seu tympanis calcatoriis radius sit faciendus, quanta remis longitudo sit conciliianda, & sic de aliis machinis.

Ratione usus autem tympanorum calcatoriorum, quæ frequentissime adhibentur ut momentum nostræ animadversionis eo magis fiat perspicuum, hoc experimentum intelligatur:

Ponamus in Fig. 46. altitudinem verticalem multorum milliarum, ad quam homo dato tempore ascendere debeat: tempus autem sumemus decem horarum, quia talis laboribus diurnis terminus esse solet, dein fingamus plures vias, AC, AD &c. diverse ad horizontalem BD inclinatas: His positis intelligimus eò celerius viatori progrediendum esse, quo viam selegerit minus inclinatam, ut eodem tempore culmen montis A attingat, & patet viam aliquam fore veluti AC, super quâ minima defatigatione iter absolvet, quan- Fig. 46.

doquidem nemo nec ſuper plano verticali incedere nec dato tempore viam infinitam abſolvere poteſt; Statuamus viam hanc minimæ defatigationis cum horizontali angulum facere A C B 30. *graduum*.

Quod ſi ita ſit, erit tympanum calcatorium ita fabricandum, ut pondus deſiderata velocitate ſuperetur, cum calcator perpetuo triginta *gradibus* à puncto tympani infimo diſtat.

Ex eodem principio etiam inter machinas diverſi generis ſelectus eſt faciendus: ita v. gr. ſi in ergatis vectiarius potentiam exerat, ſeu preſſionem horizontalem, quæ efficiat quartam ſui proprii ponderis partem, hocque niſu ſingulis minutis primis ſpatium 200. *ped.* abſolvat, is fere ut puto eodem defatigabitur modo, ac ſi eadem velocitate tympanum rotatorium ad angulum 30. *grad.* calcet; interim tamen pondus duplum eodem tempore ad eandem altitudinem hoc modo feret calcator, quia cæteris paribus preſſionem duplam exerit.

Regula 2.

§. 5. Exiſtente eadem *potentia abſoluta* dico omnes machinas, quæ nullas patiuntur frictiones & quæ nullos motus ad propoſitum finem inutiles generant, eundem effectum præſtare neque adeo unam alteri præferendam eſſe.

Demonſtratio.

Ex mechanicis conſtat machinam utcunque compoſitam rèduci poſſe ad vectem ſimplicem: igitur omnem machinationem hydraulicam repræſentare licebit ſimplici antlia vecte inſtructa Fig. 47. ubi nempe embolus ope vectis M N mobilis circa punctum M detruditur, atque ſic aqua per orificium F expellitur. At vero ſi potentia movens P vecti applicata intelligatur in N, videmus ex præcedente propoſitione nihil lucri accedere *potentiæ abſolutæ* ab aucta vel diminuta longitudine vectis M N: & certe quæcunque ſit iſta longitudo fieri poteſt, ut *potentia movens* eadem atque invariata velocitate mota eandem aquæ quantitatem eodem impetu expellat, ſi modo amplitudo antliæ A B rationem habeat conſtantem ad longitudinem vectis M N. Ex quibus perſpicuum eſt, omnes machinas eadem *potentia abſoluta* eundem effectum præſtare, ſi modo à frictionibus motibuſque ad deſtinatum finem inutilibus animus abſtrahatur.

Scholium.

Scholium.

§. 6. Non desunt qui putent machinam excogitari posse, cujus ope minimo labore maxima aquæ quantitas ad quamcunque altitudinem elevari possit, animumque excrucient, in anquirendis rotis, vectibus, ponderibus appendendis: sed operam perdunt, neque audiendi sunt hujusmodi promissores, cum magni quid sibi videntur invenisse: Optima machina est, si solum ejus effectum respiciamus, quæ minimas patitur frictiones, nullosque generat motus inutiles, de quo utroque evitando præcepta trademus infrà,

Regula 3.

§. 7. In antliis, quales Figuris 45. & 47. repræsentantur, in quibus superficies aquæ interna A B in eadem propemodum altitudine est cum foramine F, sunt *potentiæ absolutæ* pro iisdem temporibus in triplicata ratione velocitatum aquarum exilientium.

Demonstratio.

Sunt enim *potentiæ moventes* in duplicata ratione velocitatum, quibus aquæ per foramen F erumpunt & velocitates *potentiarum moventium* sequuntur ipsam rationem velocitatum aquarum exilientium: Sed pro iisdem temporibus sunt *potentiæ absolutæ* ut potentiæ moventes multiplicatæ per suas velocitates, ergo patet propositio.

Scholium.

§. 8. Sequitur ex ista regula, si animus sit aquam per foramen F ad altitudinem F G elevare, magnam *potentiæ absolutæ* partem sine fructu perdi, cum aquæ majori impetu erumpunt, quam quæ altitudini F G respondeat; fac enim aquas dupla velocitate expelli, requiretur *potentia absoluta* octupla, neque tamen ratione finis propositi effectus plus quam duplus est censendus, quia nempe eodem tempore dupla aquarum quantitas elevatur: potuissetque iste effectus obtineri *potentia absoluta* subquadrupla exprimendo aquas simplici velocitate per foramen duplum; Hoc igitur nomine tres quartæ partes istius potentiæ inutiliter impensæ dicendæ sunt. Originem hujus detrimenti indicavi §. 5. eaque consistit in motu qui generatur ad propositum finem inutili: nempe pe omnis motus qui aquis residuus est postquam altitudinem G attigerunt in nostro casu superfluus est dicendus.

Regula 4.

Fig. 48. §. 9. Cum aquæ expelluntur per canalem D F (Fig. 48.) habentque in orificio F velocitatem quæ debeatur altitudini verticali G F, est *potentia absoluta* eodem tempore impensa proportionalis velocitati aquæ in F ductæ in altitudinem G supra A B.

Demonstratio.

Est enim potentia movens P proportionalis præfatæ altitudini & velocitas istius potentiæ est ut velocitas aquæ in F.

Scholium.

§. 10. *Potentiæ absolutæ* majori ratione crescunt quam velocitates aquarum effluentium, id est, quam quantitates eodem tempore ejectæ: attamen differentia rationum fere insensibilis est, cum altitudo F G parva admodum est ratione altitudinis canalis F D: Sit ex. gr. F G æqualis $\frac{1}{4}$ F D (negligendo altitudinem B D) mox vero ejiciantur aquæ velocitate dupla, ita, ut nunc sit F D = F G; sic erunt *potentiæ absolutæ* ut $1 \times \frac{5}{4}$ ad 2×2 seu ut 5 ad 16 sic ut ad ejiciendam duplam aquæ quantitatem *potentia absoluta* requiratur plusquam tripla: Si vero F G statuatur prius $= \frac{1}{100}$ F D, & deinde aquæ rursus dupla velocitate exprimi ponantur, erunt nunc *potentiæ absolutæ* ut 1×101 ad 2×204 seu ut 101 ad 208, quæ ratio à subdupla parum deficit. Sequitur inde, quo minori velocitate aquæ hauriantur, eo majori cum fructu *potentiam absolutam* impendi, & tunc demum eam propemodum omnem utiliter impendi, cum fere insensibili velocitate aquæ per orificium F effluunt: poterit autem magnitudo orificii compensare velocitatis exiguitatem, ut dato tempore notabilis aquarum quantitas hauriri possit. Dispendium *potentiæ absolutæ* sic definietur.

Regula 5.

§. 11. Constitutum fuerit ope antliæ A B D F, valvula in fundo instructæ & aquæ impositæ, aquas ex loco humiliori A D in altiorem F transfundere, fueritque velocitas media aquæ in F effluentis debita altitudini F G: erit

erit dispendium *potentiæ absolutæ* ad integram hanc potentiam ut F G ad altitudinem G supra A B.

Demonstratio.

Fingamus augeri admodum orificium F diminuta in eadem ratione velocitate aquarum effluentium in F; sic non mutabitur quantitas aquæ dato tempore effluentis, si velocitas *potentiæ moventis* eadem sit, atque proinde idem erit effectus. Sed si velocitas ita diminuatur, ut altitudo ipsi debita sit insensibilis, exprimetur *potentia movens* per altitudinem F supra A B, cum antea *potentia movens* erat æqualis altitudini G supra A B; & cum in utroque casu eadem sit velocitas *potentiæ moventis*, erunt *potentiæ absolutæ* pro iisdem temporibus ut altitudo G ad altitudinem F supra communem A B. Igitur differentia altitudinum G & F exprimet dispendium, cum integra altitudo G supra A B repræsentat totam *potentiam absolutam*.

§. 12. Idem ratiocinium valet pro omni machinationum genere: Quoties nempe aquæ in locum, ad quem elevandæ sunt, evectæ notabilem habent velocitatem, magnum fit *potentiæ absolutæ* dispendium: posita enim altitudine elevationis $= A$; altitudine debita velocitati aquarum in loco quo effunduntur $= B$, integra potentia absoluta $= P$, perdetur $\frac{B}{A+B} \times P$.

Notari etiam potest, cum aquæ trans altitudinem aliquam, cujus culmen in F positum sit, fundi debent ope antliæ tubo instructæ, continuandum esse tubum D F inferiora versus quantum id liceat, nec abrumpendum in F, prouti id apparet ex Fig. 49. Nam si v. gr. punctum F duplo altius positum sit, quam extremitas tubi G, duplo major *potentia absoluta* requiritur pro transfundendis aquis per canalem abruptum in F, quam per continuatum usque in G; si parvula utrobique velocitate effluant, cujus nempe altitudo genitrix parva sit ratione altitudinum F D vel G D. Fig. 49.

Regula 6.

§. 13. Cum in antliis quas hucusque consideravimus opercula A B seu potius emboli non bene lateribus machinarum respondent, hiatus relinquitur, & ab hoc aliud dispendii genus in potentiis absolutis oritur, quod in antliis, in quibus altitudo orificii suprà embolum negligi potest,

 sic

ſic determinatur. Ut aggregatum ex foramine effluxus & prædicto hiatu, ad eundem hiatum, ita *potentia abſoluta*, quæ impenditur, ad partem illius quæ inutilis eſt, ſeu ad ejusdem diſpendium.

Demonſtratio.

Nam aquæ per foramen & hiatum æqualiter premuntur, & æquali velocitate fluunt; perditur autem omnis *potentia abſoluta*, quæ aquas per hiatum cogit, & hæc ſe habet ad integram *potentiam abſolutam*, ut hiatus ad ſummam foraminis & hiatus.

Scholium.

§. 14. Convenit utique embolis uti bene formatis & politis; neceſſe quoque eſt ut cavitas antliæ ſit plane cylindrica, ejusdemque latera pariter perpolita. Vix autem crediderim, niſi id fiat alio fine, è re eſſe, ut emboli cavitates ultima accuratione expleant, quia fortaſſe ſic majus oritur virium diſpendium à frictionibus, quam ſi circumcirca parvulus relictus fuiſſet hiatus: Si enim hiatus ille centeſimam v. gr. partem foraminis effluxus efficiat, vix amplius locus erit frictionibus & non niſi centeſima præterpropter *potentiæ abſolutæ* pars inde perditur, & fortaſſe à frictione emboli cavitatem antliæ exacte occupantis majus diſpendium oritur. Igitur hoc reſpectu non eſt quod nimis ſollicite evitemus tranſitum aquæ per hiatum ab embolo relictum. Non reſpicit autem hæc animadverſio illas machinas, in quibus emboli retractione aquæ in antliam attrahendæ ſunt. Hic enim juſta & plena emboli magnitudo omnino eſt neceſſaria.

Regula 7.

§. 15. In machinis quæ plura habent foramina aquas tranſmittentia ex una cavitate in alteram, aliquid de *potentia abſoluta* perditur, cujus rei rationem in præcedente ſectione eſſe diximus, quod ſingularum guttularum ex una cavitate in alteram per foramen commune fluentium *aſcenſus potentialis* perit.

Quo plura ſunt & quo minora hujusmodi foramina, eo majus oritur *potentiæ abſolutæ* diſpendium, quod magni momenti eſſe ſolet, idque fortaſſe præter communem opinionem, in machinis, quas Vitruvius ab inventore vocat,

vocat, Ctesibianis. Loquor autem de foraminibus ita dispositis, ut omnis aqua effluxura per illa transire debeat. Istud jam detrimenti genus tali definietur calculo.

Sit amplitudo foraminis ultimi aquas in aërem emittentis $= n$, amplitudines autem reliquorum foraminum, per quæ aquæ trajiciuntur intra machinam, designentur litteris α, ζ, γ, &c. & erit, posita utrobique eadem *potentia movente*, altitudo debita velocitati aquæ effluentis ad similem altitudinem nullis obstantibus foraminibus internis, ut
1 ad $1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\zeta\zeta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. (per §. 11. *sect.* 8.) sequitur inde factis istis altitudinibus inter se æqualibus, fore *potentias moventes* ut
$1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\zeta\zeta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. ad 1, & quia utrobique velocitates potentiarum moventium eædem sunt, similem quoque pro iisdem temporibus rationem habebunt *potentiæ absolutæ*. Superflua igitur est pars ejus $\frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\zeta\zeta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} +$ &c. unde dispendium *potentiæ absolutæ* erit ad totam hanc potentiam ut

$$\frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\zeta\zeta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \text{\&c. ad } 1 + \frac{nn}{\alpha\alpha} + \frac{nn}{\zeta\zeta} + \frac{nn}{\gamma\gamma} + \text{\&c.}$$

Scholium.

§. 16. Quoties idea machinæ foramina postulat, per quæ aquæ ex uno modiolo in alium transfluant (quod fit in omni antliarum genere; veluti aspirantium, *aspirantes* gallice aut prementium, *foulantes* &c.) sunt illa foramina quantum id reliquæ circumstantiæ permittunt, amplissima facienda, ita ut amplitudo orificii effluxus parva admodum fit respectu illorum foraminum internorum: Ut vero usus regulæ clarius pateat, exempla considerabimus machinarum aliarum non minus usitatarum.

Exemplum I.

Proposita sit machina (quam repræsentat Figura 50.) in qua emboli C & F alternatim deprimuntur, atque per diabetas A B, D E aquæ in modiolum B E H intruduntur, ut sic jactus fiat continuus per orificium H. Cum hic emboli alternatim agant, alterutrum considerabimus quasi solum sed continue agentem; ita vero considerandum est foramen effluxus H, amplitudi- Fig. 50.

nis

nis n, & alterutrum foraminum o, p, quibus singulis sit amplitudo a; ita erit dispendium *potentiæ absolutæ* $= \frac{nn}{aa}$, posita potentiâ integra $= 1 + \frac{nn}{aa}$, quæ quantitates sunt ut nn ad $nn + aa$. Considerabile certe est hoc dispendium, si iconibus harum machinarum fidere licet, in quibus sæpe orificia o & p minora sunt orificio effluxus H, quod si foret plus quam dimidium perderetur *potentiæ absolutæ*. Erunt autem canales AB & DE per totum tractum, quantum id licet, amplificandi, ut machina parum de suâ præstantia perdat.

Ceterum fuit hæc machina excogitata, ut jactus fieret continuus per H. Quia tamen fieri non potest, quin aliquod temporis intervallum intercedat inter ultimum emboli elevationis punctum, instantisque ejusdem depressionis initium, non poterit jactus omnino esse continuus & æquabilis. Huic vero incommodo optimum remedium attulit auctor machinæ illius, cujus mentionem facit D. Perrault in *Comment. ad Vitruvium pag.* 318. *edit.* 2. *Paris.* quamque in Bibliotheca Regia Paris. asservari dicit; inserviet nobis hæc machina alterius exempli loco: figuram autem desumam una cùm ejusdem descriptione ex ipso Perraultio.

Exemplum 2.

„ Machina est referente præfato Perraultio, in quá aqua expellitur ex
Fig. 51. „ modiolo A (Fig. 51.) mediante embolo B in catinum FG, ex quo aër,
„ si modo aliquid aquæ jam adsit, egredi non valet; quia tubus EF us-
„ que ad fundum fere descendit: sic enim fit, ut aqua propulsa ex modio-
„ lo A per diabeten D, imumque catini occupans claudat orificium tubæ in
„ F, aërique transitum neget. Igitur cum embolus novas intrudit aquas
„ in mediolum, partim aëre partim aqua, repletum, hæ aquæ de novo af-
„ fusæ vim exerunt in utrumque fluidum, & cum aqua non possit exilire
„ per tubum F E eadem velocitate qua irruit ex antlia per diabeten D, quia
„ scilicet (sunt verba Perraultii) tubus FE in extremitate sua E orificio per-
„ forata est multo minori, quam est orificium tubi D, aqua in catino ac-
„ cumulata aërem comprimit, ab eodemque reciproce pressa, etiam dum
„ embolus elevatur, per tubam F E exilit. „

Perditur in hâc machina magna *potentiæ absolutæ* pars à transitu aquæ per diabeten D, hocque dispendium eo majus erit, quo angustior est iste tubulus: fiat

fiat igitur amplus aut etiam plures tubi conſtruantur aquas transmittentes: majoris eſt momenti hæc annotatio in præſenti caſu, quod multo majus diſpendium ab anguſtia diabetes D oritur, quam in aliis machinis; fac enim amplitudinem hujus diabetes eandem, quæ eſt orificio E, & pone inſuper æqualibus temporis intervallis embolum deprimi, retrahique non perdetur jam ſolum dimidia *potentiæ abſolutæ* pars, ut aliàs, ſed plane quatuor quintæ partes inutiles fient. Quia vero multa ſunt in hâc machina, quæ ſingularem poſtulant calculum, placet illam ſeorſim perluſtrare.

Digreſſus continens aliquas commentationes in Machinam Hydraulicam quam repræſentat figura 51.

(α) Non poteſt jactus aqueus per E eſſe omnino æquabilis, durante tota emboli agitatione: Dum enim embolus elevatur, novæ aquæ non accedunt, atque ſic diminuitur quantitas aquæ in catino G E contentæ, aërque eidem ſuperincumbens dilatatur ac denique elater ipſius diminuitur: hinc quoque velocitate continue minori aqua erumpit donec rurſus ab embolo intruſo acceleretur.

Verum ſi ponatur ſpatium, quod aër in catino occupat longe majus ſpatio illo ab aqua, quæ durante una emboli elevatione ejicitur, occupato, ceſſat fere tota hæc inæqualitas, poſito embolum uniformiter agitari & diu ante fuiſſe agitatum, quæ poſterior hypothſis ideo neceſſaria eſt, quod primæ agitatione valde differant à ſequentibus. Igitur brevitatis ergo omnibus hiſce hypotheſibus ſatiſfaciemus, ideſt, ubique *ſtatum*, qui dicitur, *permanentiæ* ponemus.

(β) Cum igitur primis emboli agitationibus ſenſim augeatur velocitas aquæ per E effluentis, mox fit ut jactus aqueus velocitatem tantum non integram attingat; quo rei ſtatu poſito, patet tantum aquæ depreſſione emboli impelli in catinum, quantum ex eodem tota emboli agitatione ejicitur.

Primis autem agitationibus plus intruditur, quam ejicitur, idque non ideo, ut putavit Dn. Perrault, quod orificium in E altero in G minus ſit (idemque enim ſuccederet ſi vel majus eſſet) ſed quod cauſa efficiens non poſſit ſtatim omnem ſuum exerere effectum in ejiciendis aquis.

(γ) Videbitur fortaſſe rem non ſatis perluſtrantibus fore, ut omnibus in ſtatu permanente jam poſitis, nulliſque præſentibus obſtaculis alienis, aqua per foramen E velocitate exiliat, qua aſcendere poſſit ad altitudinem columnæ aqueæ in æquilibrio poſitam cum preſſione emboli: atque ita ſane foret, ſi preſſio emboli ſine interruptione adeſſet, nullusque in aqua *aſcenſus potentialis* perderetur: quia vero in utroque res aliter ſe habet, non poteſt non aliter oriri in jactu aqueo velocitatis æſtimatio: Hinc quiſque non obſcure videt animum advertendum eſſe ad temporum rationem, quibus embolus deprimitur, retrahiturque, tum etiam ad rationem amplitudinum in canaliculo D & orificio E.

(δ) Ponamus igitur tempus quo embolus deprimitur $= \theta$; tempus unius integræ agitationis $= t$, amplitudinem orificii E $= \mu$, & diabetes D $= m$: deinde comparata potentia embolum detrudente cum ſuperincumbente columna aquea, faciamus hujus columnæ altitudinem $= a$, altitudinem vero aquæ exilientis velocitati debitam $= x$. His ita ad calculum præparatis licebit duobus indagare modis rationem quæ futura ſit inter velocitates aquarum in orificio E & diabete D, atque hinc valorem incognitæ x elicere. *Primò* enim patet tempore θ (quo ſcilicet embolus detruditur) tantum aquæ fluere per diabeten D, quantum tempore t (quo embolus deprimitur retrahiturque) effluit per E. Eſt igitur velocitas in D ad velocitatem in E ut $\frac{1}{m\theta}$ ad $\frac{1}{\mu t}$: & quum poſterior hæc velocitas ſit $= \sqrt{x}$, erit altera $= \frac{\mu t}{m\theta}\sqrt{x}$. *Secundò* quia velocitas aquæ effluentis debetur preſſioni aëris in catino, ſequitur hanc preſſionem æquivalere ponderi columnæ aqueæ altitudinis x; ſed ſi à preſſione emboli auferas preſſionem aëris, habebis preſſionem, quæ velocitatem aquæ in D generet; hinc quia differentia preſſionum exprimitur per $a - x$, repræſentabitur velocitas aquæ in D per $\sqrt{(a-x)}$; Igitur nunc eſt velocitas aquæ in D ad velocitatem aquæ in orificio E ut $\sqrt{(a-x)}$ ad $\sqrt{x}$. Combinatis rationibus utroque modo inventis, fit

$$\sqrt{(a-x)} : \sqrt{x} = \frac{1}{m\theta} : \frac{1}{\mu t}, \text{ ſive}$$

$$x = \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a.$$

Pa-

Patet ex ista æquatione altitudinem jactus duplici titulo deficere ab altitudine columnæ prementis a, magis nempe deficit, cum celerius deprimitur, tardiusve elevatur embolus tum etiam cum orificium E ratione canaliculi D amplitudine crescit. Fuerit v. gr. amplitudo istius orificii æqualis amplitudini tubuli D atque pari celeritate embolus deprimatur eleveturque & prodibit $x = \frac{1}{5} a$, sic ut ad quintam partem tantum assurgat vena effluens altitudinis a.

(ε) Dispendium *potentiæ absolutæ* jam hoc modo eruetur, posito prius nullum laborem in elevandum embolum impendi. Sit velocitas quâ embolus deprimitur $= v$, & erit *potentia absoluta* tempore unius agitationis integræ impensa $= a v \theta$ (per paragraphum tertium) quia vero effectus in eo consistit, ut effluxus fiat per E durante tempore t ipsaque aqua ad altitudinem $\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a$ elevetur, potuisset id antlia simplex figuræ quadragesimæ quintæ efficere, si pro *potentia premente* in illa sumtus fuisset cylindrus aqueus altitudinis $\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a$, atque hæc potentia durante tempore t velocitate $\frac{\theta}{t} v$ egisset; unde *potentia absoluta* in hâc machina simplici, qua nihil de illa perditur, requisita futura fuisset $=$

$$\frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a \times \frac{\theta}{t} v \times t = \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a v \theta.$$

Est igitur tota *potentia absoluta* ad partem ejus inutiliter perditam ut $a v \theta$ ad $a v \theta - \frac{mm\theta\theta}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times a v \theta$ seu ut $mm\theta\theta + \mu\mu tt$ ad $\mu\mu tt$. Igitur si integra *potentia absoluta* designetur per P, erit ejus dispendium $= \frac{\mu\mu tt}{mm\theta\theta + \mu\mu tt} \times P$.

Necesse igitur est in hâc præ aliis antliis, ut diabetes amplitudine admodum superet orificium E, vel ut multiplex adsit. Si enim unicus adesset, isque amplitudine orificio E æqualis, simulque uniformi velocitate sursum deorsumque agitari ponatur embolus, dispendium orietur quatuor quintarum totius partium: atque si vel duplo amplior fiat, etiamnum perdetur dimidium *potentiæ absolutæ*.

(ζ) Denique perspicuum est minorem pressionem sustinere latera catini G E, quam modioli A A, quippe pressiones istæ sint ut x ad a, id est, ut

$mm\theta\theta + \mu\mu tt$ ad $mm\theta\theta$, ex qua ratione artifices judicabunt de firmitate laterum, quæ pro utroque requiritur.

Regula 8.

§. 17. Quando embolus in antliis retrahitur & aqua in modiolum influit, non solum proprio pondere solicitata sed maximam partem ab embolo attracta, tunc omnis *potentia absoluta* in hanc attractionem impensa casu supervenit, quia antlia, sub aquis, ut fit, posita, sua sponte impleretur si sufficiens huic impletioni tempus concederetur; nec adeoque attractio illa ita pertinet ad ejiciendas aquas certa cum velocitate, quin tota vitari possit, hocque nomine labor in illam impensus mihi inutilis dicitur.

Quia vero influxus aquarum partim proprio pondere fit, partim etiam elevatione emboli, non potest dispendium *potentiæ absolutæ* ab effectu æstimari: Quin potius calculus ita est ponendus, ut positis potentia embolum in certo situ elevante $= \pi$, velocitate emboli $= v$, tempusculoque quantitatibus π & v respondente dt, dicatur omnis *potentia absoluta* in elevationem emboli impensa $= \int \pi v dt$ vel $= \int \pi dx$, si per dx intelligatur elementum spatioli tempusculo dt percursi. Sequitur inde, si constantis magnitudinis sit, uti fere est conatus, quo embolus elevatur, fore *potentiam absolutam* æqualem *potentiæ moventi* ductæ in spatium percursum: simile autem ratiocinium cum valeat etiam pro depressione emboli simulque tantum elevetur embolus quantum deprimitur, apparet *potentias absolutas*, quæ in attrahendas expellendasque alternatim aquas impenduntur, proxime esse ut *potentiæ* utrobique *moventes*; unde dispendium oritur quod est $= \frac{\pi}{\pi + p} \times P$, factis scilicet potentia elevante $= \pi$, potentia deprimente $= p$ & *potentia absoluta* in elevationem depressionemque emboli impensa $= P$.

Potest aliter dispendium *potentiæ absolutæ* proxime æstimari ex eo, quod omnis *ascensus potentialis* aquæ in antliam influentis inutiliter generatus censeri debeat. Sed si iisdem temporibus, sive eadem velocitate embolus sursum deorsumque movetur, erit velocitas quâ aquæ admittuntur ad velocitatem quâ ejiciuntur reciproce ut foramina respondentia, ipsique *ascensus potentiales* utrobique erunt in ratione quadrata inversa foraminum respondentium. Si deinde

diver-

diversis temporibus fiant emboli elevatio & depressio, sunt velocitates reciproce ut tempora & *ascensus potentiales* reciproce ut quadrata temporum. Est igitur *ascensus potentialis* aquæ influxu generatus ad *ascensum potent.* qui ab effluxu oritur solusque intenditur, in ratione reciproca quadrata composita ex ratione foraminis influxus ad foramen effluxus & temporis, quo hauriuntur aquæ ad tempus quo expelluntur.

Scholium.

§. 18. Ex utraque æstimandi ratione sequitur lente embolum esse elevandum: ita enim parva fit *potentia movens* ratione primæ methodi aut magnum fit tempus elevationis ratione secundæ, atque sic operarii singulis elevationis emboli intervallis à conatu præcedentis depressionis exantlato reficientur. Posterior porro methodus indicat foramina, per quæ aquæ attrahuntur amplianda & multiplicanda esse; id vero etiam priori conforme est methodo, quia sic sufficiens fere aquæ quantitas sua sponte influit, minorique adeo *potentia movente* opus est.

Regula 9.

§. 19. Denique jactum aqueum verticaliter assurgentem nunquam eam attingere altitudinem observandum est, quæ debeatur aquæ velocitati initiali, id est, si vena fluidi verticaliter assurgere incipiat ab sua origine velocitate tali, quam grave libere cadendo ex altitudine a acquirat, non poterit fluidum ascendere ad totam altitudinem a, etiamsi aëris resistentiam removeas, aut quicquid excogitare velis, quod casu motum retardare queat. Ipsa enim rei natura defectum aliquem exigit necessario, cujus rei ratio physica hæc est: Nempe quælibet guttula etiamsi ascensum incipiens verticalem, non potest tamen, quin sensim ad latera deflectatur & tandem, cum ad summum pervenit, motu feratur horizontali, qui notabilis esse debet, quia per supremum limbum vel sectionem venæ aqueæ omnis aqua transit, quæ per foramen effluxit: fac igitur unicuique guttulæ eo temporis puncto quo horizontaliter movetur velocitatem inesse, quam grave lapsu libero per altitudinem b acquirit: ita vides non posse venam ultra altitudinem $a-b$ assurgere: Atque hoc titulo dispendium oritur ratione *potentiæ absolutæ* totius ut b ad a.

Scholium.

§. 20. Observatum fuit inter aquas communi velocitate ex tubulis diverſimode formatis ejectas alias aliis altius aſſurgere: Ergo hic attendendum eſt ad ultimorum tubulorum aquas emittentium (*des ajutages*) conformationem aptiſſimam.

Hâc de re experimenta inſtituit D. Mariotte in *tract. de mot. aquar.*

Scholium Generale.

§. 21. Examinavimus adhuc impedimenta, quæ caſu ſuperveniunt in machinis hydraulicis aquas cum impetu ejicientibus: Præcipua illa eſſe puto, quæ expoſui; poterunt tamen alia inſuper excogitari, ſed, ut credo, minoris admodum momenti. Ubique fere menſuras dedimus omnino geometricas ſimulque modum indicavimus, quo iiſdem impedimentis maximâ ex parte obviam iri poſſit. Qui majoribus intendit, putans poſſe minimo labore ſeu (quod eodem recidere demonſtravi § 3.) minima *potentia abſoluta* quemvis effectum in elevandis aquis deſideratum præſtari, opinione fallitur, atque oleum & operam perdet. Si enim ab impedimentis iſtis expoſitis aliiſve ſimilibus fortaſſe excogitandis animum abſtrahas, machina in rerum natura perfectiſſima erit ſimplex antlia figuræ quadrageſimæ quintæ, atque ſi aquæ ejus ope in altum projectæ colligantur in G, dico fieri non potuiſſe ut minori labore eadem aquarum quantitas ad eandem altitudinem F G elevarentur.

Eſt deinde aliud machinarum genus, quod à machinationibus adhuc pertractatis differt in eo, quod hæ aquas cum impetu ejiciant, illæ placide ſine motu notabili transferant. Sed & in his ultimus perfectionis qui dari poteſt gradus eodem recidit. Sunt autem pleræque multis obſtaculis iiſque maximi momenti obnoxiæ. De his igitur nunc directe nobis erit agendum.

(B) *De machinis hydraulicis aquas ſine notabili impetu ex loco humiliori in altiorem tranſportantibus.*

Regula 10.

§. 22. Si pondus aliquod per datam altitudinem verticalem (a) *potentia movente* utcunque variabili ſed directe applicata elevetur nullusque motus in ſummitate altitudinis propoſitæ corpori ſuperſit, conſtanter erit eadem *potentia abſoluta* in elevationem ponderis impenſa, nempe æqualis producto ex pondere corporis elevati & altitudine elevationis a.

De-

Demonſtratio.

Nam ſi pondus, quod vocabo A, aſcenderit per altitudinem y, eoque in loco animari ponatur potentia movente variabili P directe applicata, moverique velocitate v, erit tempuſculum, quo pondus per elementum dy elevatur $= \frac{dy}{v}$, quod ductum in *potentiam moventem* P, ejuſdemque velocitatem v, dat elementum *potentiæ abſolutæ* (per defin. §. 2.) $= P\,dy$, ergo $\int P\,dy$ dabit totam *potentiam abſolutam*, ſi poſt integrationem fiat $y = a$; in omni vero motu incrementum velocitatis dv eſt æquale potentiæ animanti ſeu moventi, quæ hic eſt $\frac{P-A}{A}$ ductæ in tempuſculum quod nunc eſt $\frac{dy}{v}$; habemus igitur $dv = \left(\frac{P-A}{A}\right) \times \frac{dy}{v}$ vel $A\,v\,dv = P\,dy - A\,dy$, id eſt, $\frac{1}{2} A\,vv = \int P\,dy - Ay$, ſive $\int P\,dy = \frac{1}{2} A\,vv + Ay$, ubi faciendum eſt $y = a$ & $v = o$ (per hypoth.) ita ut ſit $\int P\,dy = A\,a$.

Quia autem, ut vidimus, $\int P\,dy$ exprimit integram *potentiam abſolutam* in elevandum pondus impenſam, erit eadem hæc potentia conſtanter eadem, nominatimque æqualis producto ex pondere A & altitudine a, ut habet propoſito. Q. E. D.

Corollarium.

§. 23. Ex demonſtratione noſtra apparet, eſſe quoque *potentiam abſolutam* eandem, quoties velocitas in ſummitate eſt eadem, id eſt, quoties altitudo ad quam corpus velocitate ſua reſidua aſcendere poteſt, nempe $\frac{1}{2} vv$ eſt conſtans: atque ſi altitudo iſta dicatur b, erit *potentia abſoluta* $= A(a+b)$. Igitur patet nunc, quanta pars *potentiæ abſolutæ* perdatur, cum animus ſit pondus A ad altitudinem a elevare, idemque in ſummitate velocitatem reſiduam habeat debitam altitudini b; erit nempe diſpendium potentiæ ad integram potentiam ut b ad $b + a$.

Scholium I.

§. 24. Cavendum itaque eſt, ne machinæ ita ſint conſtructæ, ut vehementi motu aquæ ad locum deſtinatum transportentur. Parvum autem eſſe ſolet iſtud diſpendii genus in pleriſque machinis.

Scholium 2.

§. 25. Omnia similiter se habent si corpus non verticaliter, sed super plano utcunque inclinato, aut etiam curva qualicunque elevetur, semper enim tota *potentia absoluta* erit æqualis $A(a+b)$, id est, producto ex pondere in altitudinem elevationis auctam altitudine velocitati corporis in summitate residuæ debita, cujus rei demonstratione supersedeo, quod parum differt à præcedente demonstratione.

Scholium Generale.

§. 26. Quia omnium machinarum utcunque compositarum effectus reduci possunt ad naturam plani inclinati, perspicuum est omnes machinas, si à frictionibus iisque *potentiarum absolutarum* dispendiis, quæ hactenus recensuimus, animum removeamus eodem recidere, quia *potentia absoluta* simpliciter pendet ab altitudine ad quam corpus est elevandum ejusdemque pondere. Habet hoc commune *potentia absoluta* cum *vi viva* seu cum *ascensu descensuve actuali*. Isque ultimus est perfectionis machinarum gradus, quem transgredi non licet, imo nec attingere quidem, semper enim remotis omnibus frictionibus dispendiisque, potuisset eadem *potentia absoluta* majus pondus ad eandem altitudinem elevari. Ut jam comparatio institui possit quædam circa machinarum defectum, tam illarum quæ aquas ad desideratam altitudinem veluti projiciunt, quam quæ easdem transportant, nunc harum posteriorum defectus maxime notabiles quoque indicabimus.

(I.) Frictiones tanto obstaculo sunt in plerisque hujusmodi machinis, ut solæ maximam *potentiæ* partem absorbeant, præsertim autem cum asserculi quadrati aut globi ovales, catena in circulum redeunte connexi, per canalem, cui sunt accommodati, transeuntis aquas elevant.

(II.) Pleræque machinæ, præsertim vero rursus quas modo indicavimus, rosariorum nomine designari solitæ ita sunt comparatæ, ut aqua dum elevatur continue pars ejus destillet, sive plane decidat in locum ex quo hausta fuit sive saltem ex loco superiori in inferiorem, uti in rosariis; si in his globuli aut asserculi canali sunt bene adaptati frictio fit fere insuperabilis, sin minus maxima aquæ quantitas per hiatus relictos destillat, ex superiorioribus diviſionibus in inferiores, ita ut minima aquæ pars in illis ſuperſit, cum culmen attigerunt, ejus quantitatis quam in toto itinere receperunt. Videntur itaque vel ſolo hoc nomine iſtæ machinæ admodum improbandæ, præſertim vero ſi aquæ limpidæ ſint elevandæ, quæ antliis hauriri poſſint.

(III.) Solent quoque machinæ ejus eſſe indolis, ut aquam ultra altitudinem propoſitam attollant: Perditur autem potentia quæ exceſſui reſpondet, atque ſi aquæ trans molem ſunt evehendæ, difficulter id obtinetur, quod indicavi §. 12.

(IV.) Sunt & machinæ, quæ directam potentiæ moventis applicationem non admittunt, ex quâ obliquitate rurſus diſpendium aliquod oritur.

§. 27. Iſtaque fere ſunt, quæ notabilis momenti mihi viſa fuerunt, obſtacula; neſcio autem an illis in tantum obviam iri poſſit, quantum de primo machinarum genere demonſtravimus: frictionum diminuendarum artificia quædam norunt mechanici: machinas quæ ſitulis aquas hauriunt atque elevant prætulerim roſariis: ſitulæ autem ita ſint fabricatæ, ſi modo id fieri poſſit, ut in ſitu infimo ſtatim impleantur nihilque emittant priusquam ad ſitum ſupremum pervenerint. Cum aqua transfundenda eſt trans locum altiorem in alium minus altum, opera danda eſt, ut impetus aquæ labentis promoveat motum tympani ſeu rotæ in gyrum agendæ, quamvis multum abſit ut ſic *omnis potentia abſoluta* utiliter impendatur, prouti fieri antlia figuræ 49. indicavimus (§. 12.) Principium actionis conſiſtet, ſi recte judicio, aptiſſime in calcatura: homines enim iſti labori maxime ſunt aſſueti; pertinet huc, quod monui §. 4. occaſione regulæ primæ de angulo acclivitatis, ſub quo viator dato tempore minima defatigatione certam attingere poſſit altitudinem verticalem. Crediderim hominem mediocris ſtaturæ, ſanum & robuſtum ſuper via ad 30. gradus acclivi incedentem non dificulter ſingulis horis 3600. pedes confecturum, atque proinde ad altitudinem verticalem 1800. pedum pondus corporis ſui, quod ponam 144. librarum ſeu duorum pedum cubicorum aquæ, elevaturum. Talis igitur homo poterit ope machinæ calcatura circumagendæ & perfectiſſimæ (in qua ſcilicet nihil de *potentia abſoluta* perdatur) ſingulis horis duos pedes cubicos aquæ ad altitudinem verticalem 1800. pedum elevare, ſeu quod idem eſt, ſingulis minutis ſecundis unum ped. cub. ad alt. unius pedis: machinas quæ multo minoris ſunt effectus, officium facientibus operariis, parum puto commendabiles: Interim inſtituto experimento in ædibus Ill. D. *General* de Coulon cum antlia, quod in fine ſectionis apponam, effectum haud parum minorem expertus ſum, quo confirmatus ſum in ſententia mea operarios calcatura plurimum præſtare: facile autem prævideo in machinis admodum compoſitis longe minorem effectum prodire, quia in his maxima *potentiæ abſolutæ* pars inutilis impenditur. Notabile iſtius rei nunc afferam exemplum à notiſſima machina Marlyenſi, oſtenſurus quam incredibile fere *potentiæ abſolutæ* diſpendium ab omnibus impedimentis collectis oriatur.

Tractatum edidit Weidlerus de *machinis hydraulicis* in quo plenam deſcriptionem facit machinæ Marlyenſis, atque refert omnes aquas elevari à motu 14 rotarum, quarum alæ ab impetu ſequanæ propellantur: hunc impetum facit pro omnibus rotis æqualem ponderi 1000594 librarum, isque eſt quem nos deſignavimus nomine *potentiæ moventis*. Præterea alas motu ferri ex aliquibus circumſtantiis colligere potui, quo conficiant $3\frac{3}{4}$ pedes ſingulis minutis ſecundis, atque hæc velocitas habenda eſt pro velocitate *potentiæ moventis*; deinde addit ſingulis diebus elevari vi illius machinæ 11700000 libras aquæ ad altit. 500 ped. His ita poſitis videamus nunc in machina ſimpliciſſima fig. 45, qua nihil de *potentia abſoluta* perdi intelligatur, quanta ad iſtam effectum potentia P pariter velocitate ut $3\frac{3}{4}$ mota requiratur. Erit autem altitudo $FG = 500$ ped. & quoniam tempore 24 horarum ejici debeant per lumen F 11700000 libræ, id eſt, 162500 ped. cub. magnitudo iſtius luminis ponenda erit $= 0,0108$ partium pedis unius quadrati: Velocitas aquæ in F tanta eſt, ut abſolvat ſingulis minutis ſecundis 173 ped. Igitur continet velocitatem $3\frac{3}{4}$, quam pondus P habere ponitur, 46 vicibus & toties ſuperare debet amplitudo antliæ A B amplitudinem luminis F: Erit proinde amplitudo A B fingenda 0, 4968, part. ped, quadrat. ex quo conſequens eſt, pondus P æquale futurum ponderi cylindri aquei ſuper baſi A B ad altitudinem 500 ped. conſtructi ſeu ponderi 248, 4 pedum cub. aquæ, id eſt, ponderi 17885 librarum, quæ tantum quinquageſimam ſextam partem efficit *potentiæ moventis* quam eadem velocitate motam applicari oſtendit Weidlerus. Sic igitur in tota machina diſpendium fit quod $\frac{55}{56}$ integræ *potentiæ abſolutæ* exæquat.

Poſtquam ita naturam machinarum hydraulicarum, quantum illud in ge-

generalibus fieri poteſt, examinavimus, haud abs re erit exemplum aliquod ſpeciale accuratius pertractare, & quia cochlea Archimedis multis gaudet egregiis proprietatibus, quas nemo ſatis, quantum ſcio, aperuit, ab hác exemplum deſumam idque eo libentius, quod multi ſint, qui contra noſtras regulas putant ſingularem huic cochleæ virtutem ineſſe pro elevanda magna aquæ quantitate brevi tempore parvaque vi: falſuntur autem qui ita cogitant: nam ſi obſtaculorum accidentalium nulla habeatur ratio, idem præſtat eadem *potentia abſoluta*, quod reliquæ machinæ omnes.

Commentationes ſpeciales de Cochlea Archimedis.

(I.) Varii ſunt auctores, qui modum docuerunt conſtruendi hanc cochleam: ſumma huc redit, ut canalis quidam aut plures ſuperficiei cylindricæ circumflectantur, & ita quidem ut canalis ubique eandem habeat inclinationem ratione axis cylindri, quam Vitruvius præter neceſſitatem in omnibus cochleis fieri jubet ad angulum ſemirectum. Requiritur ergo ante omnia, ut in ſuperficie cylindri linea ſpiralis ducatur ad cujus normam canalis ſit ponendus, id quod facillime meo judicio in ſuperficie admodum polita fieri poterit (præſertim cum helices non parum à ſe diſtare debent) circumvolvendo eidem aliquoties funiculum: hic enim tenſus ſua ſponte deſideratam lineam faciet, neque enim ſpiralis ſibi ſimilis ubique eſſe poteſt, aut conſtantem habere ad axem cylindri inclinationem, quin arcus inter duo puncta interceptus ſit omnium arcuum eoſdem terminos habentium minimus, quam indolem funiculo extenſo competere palam eſt: ſi vero frictiones impedimento ſint, filum ad minora intervalla extendi poterit. Sed non eſt, cur in re per ſe pluribus modis facillima ſcrupuloſi ſimus.

Lex ſpiralis primaria eſt, ut ubique æqualiter ad axem cylindri inclinet, cui legi ſequens innititur conſtructio, quam in gratiam infra dicendorum apponam:

Finge cylindrum rectum M*af*N (Fig. 52. (1)) cujus ſuperficiei ſit inſcribenda deſiderata ſpiralis *a* 1 *b* 2 *e* 3 *d* &c. eandemque ſuperficiem puta explicatam in planam figura præditam parallelogrammi rectanguli A *a f* F (Fig. 52. (2)), ſumantur hic ab una parte AB, BC, CD, DE, & EF, ab altera Fig. 52. (1) Fig. 52. (2)

tera

tera ab, bc, cd, de, & ef, singulæ singulis æquales; jungantur lineis rectis puncta B, C, D, E & F cum punctis a, b, c, d, & e: his ita factis, si superficies plana rursus in cylindricam convolvatur, junctis lineis AF & af, coincidentibusque punctis A & a; B & b &c. fiet ut lineæ aB, bC, cD &c. in superficie cylindrica lineam continuam forment, quæ ipsa erit spiralis desiderata. Ad faciliorem intellectum in utraque figura puncta homologa communibus litteris distinxi.

(II.) Propositus jam fuerit cylindrus MafN (Fig. 52. (1)), habens ad ductum spiralis modo descriptæ circumflexum canalem, cujus diametrum veluti infinite parvum censebimus ratione diametri ad cylindrum pertinentis: atque sic habebitur cochlea Archimedis, quâ si uti velimus ad elevandas aquas ex M in N, cylindrus erit horizontem versus inclinandus, & ita quidem ut angulus aMH (interceptus inter diametrum baseos Ma, quæ est in plano verticali, & horizontalem MH) sit major quam angulus sao, quem faciunt tangentes circuli & spiralis in communi puncto a. Deinde converso cylindro circa axem suum in directione agbMs aquæ influent per inferius canalis circumducti orificium effluentque per superius.

(III) Ut naturam hujus elevationis recte intelligamus, tria se nobis offerunt puncta in qualibet spiralis helice examinanda, nempe puncta o, p & q, quorum primum o maxime distat ab horizonte, alterum p eidem proximum est, & q in eadem altitudine positum est cum puncto o in helice proxime inferiori sumto: per singula puncta o ducta est recta gn; per puncta p recta bm & per puncta q recta st. Situs vero harum linearum determinabuntur in sequentibus.

(IV) Sit radius, qui pertinet ad basin cylindri, $= 1$ sumaturque pro sinu toto; sinus anguli $sao = m$, ejusdemque cosinus $= M$, sinus anguli aMH $= n$, ejusdemque cosinus $= N$; arcus $ag = X$; cosinus illius arcus $= x$, erit perpendiculum ex o in horizontem demissum, nempe $or = \frac{mNX}{M} + n(1 + x)$. Quia vero or maxima est, fit $\frac{mNdX}{M} + ndx = 0$, & cum ex natura circuli sit $dX = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$, erit $\frac{-mNdx}{M\sqrt{(1-xx)}} + ndx = 0$, ergo $\sqrt{1 - xx} = \frac{mN}{Mn}$. Est igitur sinus arcus quæsiti $ag = \frac{mN}{Mn}$ aut cosinus

$x =$

$x = \pm \frac{\sqrt{(nn-mm)}}{Mn}$: ſignum ſuperius dat arcum ag, inferius arcum ab determinantem puncta infima p.

Atque ſic determinavimus tum puncta ſuprema o, tum ima p, patetque arcus Mb & ag eſſe inter ſe æquales, ſimul autem ex quantitate irrationali $\sqrt{(nn-mm)}$ valorem litteræ x afficiente colligitur fieri non poſſe, ut m ſit major quam n: neque enim in hoc caſu punctum datur infimum, quod tota ſpiralis ubique aſcendit continue: Neque etiam inſerviet ſic cochlea ad elevandas aquas; unde jam patet ratio ejus, quod monui in articulo hujus digreſſionis ſecundo, de requiſito exceſſu anguli aMH ſupra angulum sao.

(V) Ponamus nunc globum alicubi eſſe in cavitate canalis, cochleamque in ſitu ſuo firmari: ſic minime quieſcet globus, quin exiſtat in puncto aliquo p. Quod ſi vero cochlea non retineri ponatur, globus deſcendet, deſcenſuque cochleam circumaget, atque ſi præterea fingatur, nullius eſſe ponderis cochleam motumque globi liberrime fieri nihil obſtantibus frictionibus, deſcendet globus ſuper recta mb non alia lege, quam globus libere ſuper plano inclinato deſcendens. Apparet itaque potentiam requiri ad impediendum globi deſcenſum, firmandamque cochleam. Iſtam potentiam applicatam ponemus in puncto f in plano circuli & perpendiculariter ad radium inquiſituri in rationem, quam habeat ad pondus globi in puncto aliquo p quieſcentis.

Sit pondus globi $= p$: quia vero actio globi eſt verticalis, reſolvenda erit in duas alias ad perpendiculum ſibi inſiſtentes, quarum una communem habeat cum axe cochleæ directionem, altera eidem perpendicularis ſit, prior cum nihil ad circumagendam cochleam conferat rejicienda, poſteriorque ſola conſideranda erit; eſt vero actio illa reſidua $= np$ & agit in vectem, qui eſt $=$ ſinui arcus Mb ſeu arcus ag, hicque ſinus (*per. art. IV.*) eſt $= \frac{mN}{Mn}$. Eſt igitur momentum actionis $= \frac{mN}{Mn} \times np = \frac{mNp}{M}$; hoc ſi dividas per radium baſeos, qui eſt vectis pertinens ad potentiam applicatam in f in æquilibrio poſitam cum actione globi, habebis iſtam potentiam quæſitam $= \frac{mNp}{M}$. Sic igitur directe ex natura vectis deducere licet, quod alii ex principio alieno petere solent. Præmissis istis præmittendis usum machinæ considerare nunc incipiemus, quem habet pro elevandis aquis.

Problema.

(VI) Quæritur quænam maxima sit aquæ quantitas quam cochlea quavis revolutione ejicere potest.

Solutio.

Consideremus helicem integram $a\,1\,b$, sitque quantitas aquæ quam plena continet $= q$: Notandum autem est non posse helicem esse totam aqua repletam, si enim totus canalis plenus esset, effluerent aquæ per orificium inferius, igitur quivis ramus, qualis est $a\,1\,b$, partim aëre partim aqua occupatur, erit autem altera aquæ extremitas in o seu puncto supremo, altera in q, seu puncto ad libellam cum priori composito: pars igitur aqua plena est $o\,p\,q$, atque si hæc pars ponatur ad longitudinem totius helicis $a\,1\,b$ ut g ad b, erit maxima aquæ quantitas una revolutione ejicienda $= \frac{gq}{b}$. Q.E.I.

Scholium 1.

(VII) Quoniam, ut diximus, fieri non potest ut aqua per totum canalis tractum sit contigua, cavendum est, ne separatio aquæ impediatur, quod facile fieri potest cum totum cylindri fundum aquæ immergitur, quia sic aëri prohibetur ingressus per orificium inferius canalis: Neque faciendum est, ut nimia fundi pars extra aquam promineat, quia sic cochlea non omnem, quam una revolutione alias posset, aquam haurit; imo nihil hauriet, si immersio punctum b non attingat: Debita autem fiet immersio usque ad punctum g, quia sic arcus helicis $o\,p\,q$, qui aquam retinere valet, maximus fit. Etsi enim nunquam rei periculum fecerim, & plerique auctores aliter de illa loqui videantur, malim tamen rationi, quam auctoritati illorum, qui ad immersionem hanc animum non adverterunt, credere.

Regula igitur *rationе immersionis* hæc observabitur, fundum nempe submergetur, donec chorda arcus extra aquam eminentis sit $= \frac{2mN}{Mn}$, ubi litteræ m, N, M, & n idem significant, quod in articulo quarto.

Scho-

Scholium 2.

(VIII) Apparet quidem poſt levem rei contemplationem eò majorem eſſe rationem inter arcum helicis opq & integram helicem $a1b$, id eſt, inter g & b, atque proinde eo majorem ceteris paribus aquæ quantitatem ſingulis revolutionibus ejici, quo minor eſt angulus sae & quo major angulus aMH, ſeu quo minor eſt diſtantia inter duas proximas helices & quo magis cochlea verſus horizontem inclinat: Veram autem illam rationem algebraice exprimere non licet: In omni tamen caſu particulari id facili appropinquatione obtinetur.

Exemplum præcedentis regulæ deſumam à cochlea, qualem Vitruvius adhibere & conſtruere docet. Facit autem angulum sae ſemirectum & ſic $m = M = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,70710$: deinde inter N G & M G rationem ſtatuit, quæ eſt ut 3 ad 4; inde deducitur angulus G N M vel aM H $= 53°, 8'$, ejusque ſinus $n = 0, 80000$ atque conſinus N $= 0, 60000$: ergo (per *art. III.*) eſt ſinus arcus ag altiſſimum punctum o definientis $= \frac{mN}{Mn} = \frac{3}{4}$, ipſeque arcus $ag = 48°, 35'$. Debet adeoque vi regulæ *art. VII.* arcus extra aquam eminens in fundo eſſe $97°, 10'$; immergeturque arcus $262°, 50'$.

Ut jam præterea definiamus rationem inter arcum helicis opq & helicem integram $a1b$, notandum eſt, eandem eſſe illam rationem, quæ intercedit inter arcum circularem gbMs & circumferentiam circuli, quod ex figura ſocia manifeſtum eſt. Determinatur autem arcus gbMs hunc in modum. Eſt nempe arc. gbMs = arc. agbMs — arc. ag. Sed vidimus in articulo tertio, ſi ex quocunque puncto ſpiralis, veluti o & q perpendicula ad horizontem punctum M radentem demittantur, qualia ſunt or & qx, fore iſtud perpendiculum $= \frac{mNX}{M} + n(1+x)$ ſeu in noſtro caſu $= 0,60000X + 0,80000(1+x)$, denotante X arcum circularem, puncto in ſpirali aſſumto reſpondentem, nempe arcum ag aut arc. agbMs & x ſignificante ejuſdem arcus coſinum. Eſt vero arc. $ag = 48°, 35' =$ (quia radius exprimitur unitate) $0, 84797$, ejuſque coſinus $= 0, 66153$: Igitur in noſtro caſu ſit $or = 0,50878 + 1,32922 = 1,83800$. Quia porro puncta o & q ſunt in eadem altitudine poſita, atque lineæ or & qx inter ſe æquales, apparet quæſtionem nunc eo eſſe reductam, ut alius arcus agbMs inveniatur puncto q reſpondens,

qui

qui si vocetur X, ejusque cosinus x, sit $0,60000\,X + 0,80000\,(1 + x) = or = 1,83800$: pro ista conditione invenitur arcus $agbMs$ proxime $175\frac{1}{2}$ *grad.* incidente puncto s in plagam agM: Et cum arcus ag fuerit $48°, 35'$, erit tandem arcus $gbMs$ $126°, 55'$, qui proinde erit ad circumferentiam circuli præterpropter ut 10 ad 29: similisque ratio intercedit inter arcum helicis opq integramque helicem.

Consequens inde est, singulis revolutionibus cochlea à Vitruvio descripta proxime ejici $\frac{11}{29}$ illius quantitatis, quam helix integra & plena continet, seu paullulum ultra trientem.

Scholium 3.

(IX) Notandum tamen est, quæcunque sit aquæ quantitas, quæ qualibet cochleæ revolutione canalem inferius ingreditur, superiusque ex eodem effluit, nullum nec detrimentum nec lucrum propterea cadere in *potentiam absolutam* si nulla habeatur frictionum ratio, quia *potentia movens* cæteris paribus illi quantitati proportionalis est. At vero quia frictiones semper obstant, eædemque fere sunt ob pondus machinæ proprium, sive major sive minor quantitas aquæ hauriatur, opera utique danda est, ut ista quantitas cæteris paribus fiat maxima: Hâc de re nunc agam paullo disertius.

Scholium 4.

(X) Jam innui suprà, crescere rationem arcus $gbMs$ ad circumferentiam circuli decrescentibus angulis sao & NMG: uterque igitur minimus esset construendus, nisi alia obstarent incommoda, præsertim ratione anguli NMG. Quod ad angulum sao attinet, potest is fere ad lubitum diminui, neque aliud inde incommodum resultat, nisi quod latera canalis circumflectendi nimis ad se invicem accedere possunt: E contrario à diminutione istius anguli aliud obtinetur compendium, nempe quod tunc eo verticalius possit erigi machina ipsaque aqua eo altius elevari, etenim angulus aMH semper major esse debet angulo sao: à verticaliori autem cochleæ positione simul obtinetur, ut minori incommodo sit machinæ proprium pondus eaque facilius sustineatur.

Hæc ita perpendens crediderim fere sufficere posse angulum 5 *graduum*, quem faciat canalis cum base nuclei. Cardanus quoque minorem istum fecit angu-

angulum quam Vitruvius, & cum eo pauciores ſuper eodem nucleo circumflecti poſſint canales, quo obliquius ſunt inſerti, Vitruvius octo, Cardanus tres tantum ponendos ſtatuit: ſunt autem canales longiores in cochlea Cardani, ita ut longitudinibus accedat, quod numero canalium decedit. Ratione alterius anguli N M G obſervari meretur, aquam altius elevari poſſe, quo major iſte fiat angulus, ſed è contrario minorem aquæ quantitatem ſingulis ejici revolutionibus. Juſtum fortaſſe tenebunt medium, qui angulum iſtum 60. facient gradum.

(XI.) Subducemus nunc hujus noſtræ quoque ad normam præcedentis articuli conſtructæ cochleæ calculum, prouti fecimus de cochlea ad Vitruvii præceptum conſtructa, art. VIII. Quia vero per hypotheſin angulus sao eſt $5°$ & angulus N M G $= 60°$; reperietur per *art.* IV. arcus ag $8°, 43'$, & linea verticalis $or = 1,00574$, cui æqualis erit altera verticalis qx, ſi dentur arcui agbMs $284°, 57'$, a quo ſi ſubtrahatur arcus ag, remanet arcus gbMs $276°, 14'$: qui reſpondet arcui helicis aquam retinere valenti: eſt igitur hæc pars ad totam helicem ut 16574 ad 21600 vel ut 8287 ad 10800, ſic ut ſingulis revolutioniqus ejici poſſint plus quam quatuor quintæ partes integræ helicis capacitatis, duplumque cum triente præterpropter hac machina efficiatur, quam obtinetur ſimili machinatione ad mentem Vitruvii fabricata: altius quoque eodem nucleo elevantur aquæ in ratione ut $\sqrt{3}$ ad $\sqrt{2}$. Venio jam ad *potentiam* tum *moventem* tum *abſolutam*, quæ in elevandis aquis impenditur.

Problema.

(XII.) Dato pondere aquæ in helice quieſcentis, invenire potentiam tangentialem in f in æquilibrio cum illo pondere poſitam.

Solutio.

Vidimus quomodo problema hoc geometrice ſolvendum ſit ratione globi in puncto infimo p quieſcentis. In præſenti vero caſu paullo aliter ſe res habet, quod pondus aquæ per magnum helicis arcum eſt diſtributum, neque in puncto aliquo dato concentratum. Facile quidem eſt in anteceſſum prævidere, in utroque caſu easdem fore potentias ex regulis mechani-

cæ

cæ indirectis; placet tamen hujus rei demonstrationem dare ex natura vectis petitam, quia mechanici eo omnia reducere amant.

Helicem considerabimus $a\,1\,b$ ex figura quinquagesima secunda seorsim desumtam, ad evitandam linearum confusionem, conservatis denominationibus *art.* IV. adhibitis. Sic igitur in Figura 53. erit rursus angulus
Fig. 53. N M G angulus quem facit nucleus cum horizonte, cujus sinus $=$ N, sinusque anguli aMH $= n$; $a\,1\,b$ est una spiralis circumvolutio: basis nuclei est circulus $acMpa$; sinus anguli pal est ut ante $= m$, ejusque cosinus M; puncta vero l & o sunt extremitates aquæ in spirali quiescentis & in eadem altitudine ab horizonte posita, ex istis punctis ductæ sunt ad peripheriam basis rectæ lc & op in basin perpendiculares. In parte helicis quam aqua occupat sumta sunt duo puncta infinite propinqua m & n & per hæc ductæ sunt rectæ nf & mg rursus ad basin perpendiculares. Denique ex punctis c, f, g, p ductæ sunt ad diametrum aM perpendiculares cd, fh, gi & pq; atque centrum basis ponitur in e, radiusque $ea = 1$. Sit jam arcus spiralis $l\,1\,o$ aqua plenus $= c$ & consequenter arcus circularis eidem respondens cM$p =$ Mc; $al = e$; $ac =$ Me; ad (seu sinus versus arcus ac) $= f$; $aq = g$; pondus aquæ in $l1o = p$: arcus $aln = x$; $nm = dx$; $acf =$ Mx; $fg =$ Mdx; $ah = y$; $hi = dy$; $hf = \sqrt{2y - yy}$, erit pondus guttulæ in $nm = \frac{pdx}{c}$; si vero linea hf multiplicetur per sinum anguli aMH, dividaturque per sinum totum, habetur vectis quo particula nm cochleam circumagere tentat: est igitur vectis iste $= n\sqrt{(2y - yy)}$ qui multiplicatus per præfatum guttulæ pondus $\frac{pdx}{c}$ dat ejusdem momentum $\frac{npdx}{c}\sqrt{(2y-yy)}$. Sed ex natura circuli est $\mathrm{M}\,dx = \frac{dy}{\sqrt{(2y-yy)}}$: hoc igitur valore substituto pro dx, fit idem guttulæ nm momentum $= \frac{npdy}{\mathrm{M}c}$, cujus integralis, subtracta debita constante, est $\frac{np(y-f)}{\mathrm{M}c}$, denotatque momentum aquæ in arcu ln; hinc igitur momentum omnis aquæ in $l1o$ est $= \frac{np(g-f)}{\mathrm{M}c}$: quod divisum per vectem potentiæ in f applicatæ seu per 1 relinquit potentiam istam quæsitam pariter $= \frac{np(g-f)}{\mathrm{M}c}$. Q. E. I.

Scholium

Scholium 1.

(XIII.) Ut appareat, non differre valorem iftius potentiæ ab illa, quam pro globo ejusdem ponderis p invenimus articulo V. nempe $\frac{mNp}{M}$, demonftranda eft æqualitas inter $\frac{np(g-f)}{Mc}$ & $\frac{mNp}{M}$ feu inter $n(g-f)$ & mNc: ifta vero æqualitas deducenda eft ex eo, quod extremitates aquæ l & o in eadem ab horizonte altitudine pofitæ fint; inde enim fequit[illegible] ut demonftravimus *art.* IV. effe aggregatum ex arcu ac multiplicato p[illegible] & ex linea Md multiplicata per n = aggregato ex arcu ac Mp pariter multiplicato per $\frac{mN}{M}$ & ex linea Mq multiplicata per n. Adhibitis itaque denominationibus præcedentis articuli, fit $Mc \times \frac{mN}{M} + (z-f) \times n = (Mc + Mc) \times \frac{mN}{M} + (z-g) \times n$, vel $n(g-f) = mNc$; quæ æqualitas demonftranda erat ad demonftrandam æqualitatem potentiarum tum pro globo tum pro aqua in f applicandarum.

Scholium 2.

(XIV) Quia potentia $\frac{np(g-f)}{Mc}$ non differt ab $\frac{mNp}{M}$ & quantitas $\frac{mN}{M}$ eadem manet, quæcunque aquæ quantitas una revolutione hauriatur aut ejiciatur, erit potentia ifta proportionalis eidem quantitati aquæ fingulis revolutionibus ejectæ feu ponderi p. Facile quoque demonftratu eft, fi eadem aquarum quantitas, eadem *potentia movente* eademque velocitate ad parem altitudinem verticalem elevetur fuper fimplici plano, quod ad hunc finem debite verfus horizontem inclinatum fit, fore ut tempus elevationis quoque idem fit.

Igitur eadem *potentia abfoluta* requiritur in cochlea Archimedis, quam fuper plano inclinato, ad quod omnes machinæ reduci poffunt, nec ullam habet ifta cochlea prærogativam præ reliquis machinis in theoria fpectatis. Fortaffe in praxi minus eft obnoxia incommodis §. 26. indicatis: nequaquam improbo ejus ufum, fed nec eam præfero præ antliis Ctefibianis.

§. 28.

§. 28. Intelligitur ex hactenus dictis, quibus titulis una machina alteri præferenda ſit, quemnam machinæ perfectionis gradum admittant; ad quid potiſſimum attendendum ſit in illarum conſtructione & uſu; quanta *potentiæ abſolutæ* pars perdatur, aliaque ſimilia: Equidem machinas tantum conſideravimus *potentiis* ut dicuntur *animatis* motas: facile autem apparet iiſdem legibus ſubjectas eſſe machinas, quæ ab impetu aquarum, venti, aut ab aquarum gravitatione hujusmodique aliis principiis ſunt movendæ; ſemper enim *potentia movens* ducta in tempus & velocitatem puncti cui potentia eſt applicata, dabit productum ex quantitate aquæ & altitudine ad quam iſta quantitas aſſumto tempore elevari poſſit ope machinæ propoſitæ, ſepoſitis impedimentis alienis. Loquor autem de machinis, quibus nihil de *potentia abſoluta* perditur; fieri enim poteſt, ut maxima pars pereat, quod ſatis oſtendimus in ſuperioribus.

§. 29. Apparet exinde aquam ad certam altitudinem elevatam poſſe rurſus ſuo deſcenſu eundem præſtare effectum: effectus autem erit æſtimandus ex quantitate aquarum elevandarum & ex altitudine elevationis, ſic ut v. gr. deſcenſu 8. pedum cubicorum ex altitudine unius pedis poſſint totidem rurſus elevari pedes cubici ad ſimilem altitudinem aut 4. pedes cubici ad altitudinem duorum pedum, aut unus pes cubicus ad altitudinem 8. pedum & ſic utcunque libuerit. Specimen machinæ, quæ poſſit aquam ad quamcunque altitudinem elevare minimo aquarum deſcenſu, videre eſt apud D. Perrault in *Comment. ad Vitruvium lib.* 10. *cap.* 12. quam machinam ut incredibile fere paradoxon affert ejusque inventorem facit D. Franchini Italum, cujus induſtria & conſiliis in horto Bibliothecæ Regiæ cum ſucceſſu conſtructa fuit. Fundamentum machinæ in eo conſiſtit, ut ſitulæ concatenatæ, & in circulum redeuntes aquam excipiant eamque in locum tranſportent infimum, ibique effundant, dum alia ſitularum ſeries aquas hauriunt & ad locum longe altiorem, minori tamen copia ferunt atque effundunt: perſpicuum autem eſt, ſeriem priorem ſi omnes ſitulæ deſcendentes graviores ſint omnibus ſitulis aſcendentibus, alteram perpetuo in gyrum acturam eſſe; Machinæ etiam ſunt, quæ idem præſtant per ſimplices tubos ope epiſtomiorum ſtatis temporibus convertendorum, in quam quidem converſionem nulla potentia impenditur. Hujuſmodi machinationes deſcribit Carolus Fontana.

At ſi quis credat poſſe ex impetu aquarum ex certa altitudine delapſarum & in machinæ alas impingentium idem obtineri, is longe aberrabit. Talis

lis machinatio pertineret ad illarum classem, quibus maxima *potentia absoluta* pars evanescit sine fructu.

Non abs re erit istud argumentum accuratius prosequi, & ostendere quantus effectus ab impetu aquarum aut venti obtineri possit & sub quibus circumstantiis effectus iste sit omnium maximus dicendus.

(C) *De Machinis, quæ ab impetu fluidi, veluti vi venti moventur.*

§. 30. Postquam aquæ ad certam altitudinem elevatæ ex eâdem rursus decidunt, continueque in alas rotæ circumagendæ impingunt, fieri aliter non potest, quin *potentia absoluta* ad rotam sic circumagendam requisita multo minor sit illa, quæ in elevationem aquarum impensa fuit, cujus rei præcipua ratio est, quod aquæ post impulsum ad latera desilientes velocitatem etiamnum conservent, quæ ad rotæ rotationem nihil confert. Igitur magna *potentia absoluta* pars inutilis fieret, si elevatione aquarum efficiendum esset, ut ab impetu earundem machina circumagatur & ab hac denique aquæ rursus aliæ ad certam altitudinem eleventur; & quidem major minorve pars perit pro diversis circumstantiis, nunquam vero, ut monstrabo, minus quam $\frac{2}{27}$ totius perdetur, si ad normam vulgaris impulsus aquarum æstimationis computus fiat.

§. 31. Statuitur autem communiter si aquæ ex cylindro valde amplo per simplex foramen tota sua velocitate, id est, quæ toti altitudini aquæ supra foramen debeatur, fluant, atque vena statim præ foramine directe impingat in planum, fore ut impetus fluidi contra planum in æquilibrio sit cum pondere cylindri aquei, super foramine ad altitudinem aquæ erecti. Experimento quidem fallaci auctores seducti hanc stabiliverunt theoriam omnino falsam. Nolui tamen hic ab illa recedere, quia veram theoriam nondum exposui atque deinceps facile erit exposita nostra theoria calculum corrigere. Liceat igitur, donec suo loco rem rectius perpenderimus, vulgari sententiæ, quamvis erroneæ, adhærere. Quo major est impetus fluidi, eo majori ratione erit *potentia absoluta*, quam dabimus, augenda.

§. 32. Finge nunc (Fig. 54.) vas A B C ceu antliam quæ aquas per foramen C in directione tantum non verticali expellat: aquas autem, cum ad summum pervenerint, ab alio vase E D F excipi. In alterius hujus vasis fundo Fig. 54.

concipe foramen D, priori C æquale, & in eadem altitudine positum, ita ut tanta aquarum copia effluat per D, quanta superius injicitur, ipsumque vas EDF constanter plenum servetur. Porro puta aquas per D effluentes perpetuo impingere in alas alicujus rotæ, quæ hoc modo circumacta aquas alias elevet: Loco istius machinæ describitur in figura simplex vectis volubilis circa H, ponendo talem vectem continue alium atque alium adesse præ foramine D, qui aquas excipiat, atque altera sua extremitate aquas hauriat, easdemque ad datam altitudinem elevet.

His ita positis inquiram primo in *potentiam absolutam*, quæ aquas per foramen C ad altitudinem CE elevat; deinde quoque in *potentiam absolutam*, quæ requiritur in G ad vectem eadem velocitate movendum, quâ movetur ab impulsu aquarum DG.

§. 33. Sit amplitudo foraminis C vel D $= n$, amplitudo AB $= m$, velocitas aquarum in C vel D $= v$, pondus cylindri super foramine C aut D ad altitudinem CE extructi $= p$: tempus fluxus $= t$; erit pondus P $= \frac{m}{n}\, p$: velocitas, qua pondus dum aquæ expelluntur descendit $= \frac{n}{m}\, v$: est igitur (per §. 3.) *potentia absoluta* in aquas per C ejectas impensa $= \frac{m}{n}\, p \times \frac{n}{m}\, v \times t = pvt$.

§. 34. Ut jam *potentia absoluta* in gyrationem vectis GL circa punctum H impensa determinetur, notandum est illam minime sibimet constare; mutari enim à mutata velocitate, quacum vectis circumagitur. Igitur faciemus velocitatem qua extremitas ejus in G movetur $=$ V. Hoc autem modo aquæ impingere censendæ sunt in G velocitate $v -$ V, atque sic pressionem exercere, quæ sit $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p$: (sunt enim pressiones in ratione quadrata velocitatum fluidi impingentis atque pro velocitate v ponitur pressio $= p$). Ista vero pressio est loco *potentiæ moventis*; possumus nempe loco pressionis fluidi ponere pondus vecti superincumbens in G, quod sit $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p$. Istud vero pondus eadem velocitate movebitur quâ punctum G, nempe velocitate V, agitque durante tempore t: Est *igitur potentia absoluta* ad rotationem vectis durante tempore t & velocitate V requisita $= \left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p \times \mathrm{V} \times t$.

§. 35.

§. 35. Quod si igitur vectis L G non immediate circumagitur, sed fluidum ad altitudinem C E elevatur, eo animo, ut vena fluidi suo impulsu in G vectem circumagendo ab altera parte aquam elevet, erit *potentia absoluta* integra ad *potentiam absolutam* utilem, ut $p\,v\,t$ ad $\left(\frac{v-V}{v}\right)^2 p\,V\,t$, seu ut v^2 ad $(v-V)^2\,V$: eademque se habebit ad partem sui inutilem ut v^3 ad $v^3 - vv\,V + 2\,v\,VV - V^3$.

§. 36. In omnibus fere machinis, quarum principium motus consistit in impulsu fluidi fieri solet, ut velocitas vectis, ubi fluidi impetum sustinet, seu V sit admodum parva ratione velocitatis fluidi v; in his autem maxima pars effectus, qui ab eadem fluidi quantitate pari velocitate moti obtineri posset, perditur.

§. 37. Maximus oritur ab impulsu fluidi effectus, sive, quod idem est, maxima fit *potentia absoluta* §. 34. definita, si sit $V = \frac{1}{3}\,v$; & tunc est ista *potentia absoluta* $= \frac{4}{27}\,p\,v\,t$, atque etiamnum viginti tribus vigesimis septimis partibus deficit, à potentia simili, quæ in elevandas aquas ex C in E F impenditur.

Si proinde naturalis habeatur aquarum descensus, atque illo utendum sit ad elevandas aquas aliudve simile quid præstandum, faciendum est ut machina eo in loco, quo fit impulsus, velocitate moveatur subtripla velocitatis fluidi impingentis. Huic vero conditioni semper satisfieri potest, quod ex allato vectis exemplo patet. Si enim majori velocitate moveatur punctum G, diminue partem H G manentibus reliquis aut eam auge, si minori moveatur velocitate punctum G. Vel etiam salva longitudine H G fac, ut aquæ in extremitate L majori minorive quantitate hauriantur.

§. 38. Ista vero ratione fluidorum ad perpendiculum in alas impingentium: alius est computus pro fluidis oblique incidentibus in alas moletrinarum vi venti agitandarum aliarumque similium machinarum. De his nunc pauca quædam superaddam atque iis sectioni huic finem imponam.

Quum fluidum in superficiem totius alæ utcunque positæ & in directione ad motum fluidi perpendiculari rotaturæ impingit, docent auctores, fluidum maximum in alam exercere nisum ad promovendam rotationem, quando ala cum directione venti angulum facit, cujus sinus sit ad sinum totum ut $\sqrt{2}$ ad ad $\sqrt{3}$; Si vero vena fluidi eadem atque tota excipiatur ab ala, modo sic modo aliter ad directionem fluidi inclinatâ, maximam pressionem sustinebit in directione rotationis ala, quæ facit angulum semirectum cum directione fluidi.

Prima Regula pertinet ad machinas quæ à vento omnia ambiente circumaguntur: altera ad illas, quæ à vena solitaria & à certa determinataque fluidi quantitate moventur. Utraque vero hypothesi innititur, quod motus alarum admodum parvus sit respectu motus fluidi, si enim ad motum alarum respicias, ambæ regulæ falsæ sunt; neque profecto iste motus negligendus est, in moletrinis enim sæpe observavi, extremitates alarum velocitate ferri, ipsam fere venti velocitatem exæquante.

Hæc cum ita sint, calculum nunc ita ponemus, ut utriusque motus rationem habeamus.

Fig. 55. §. 39. Sit igitur fluidum D E B A (Fig. 55.) quod sub directione E B impingit in totum planum A B: moveri autem ponitur planum motu parallelo in directione B b ad E B perpendiculari: Sint porro velocitates ejusmodi, ut dum particula fluidi percurrit lineam E B, punctum plani B absolvat lineam B b. His positis fingere licet totum systema, fluidum nempe cum plano moveri à b versus B & quidem velocitate b B: Ita vero fiet, ut planum A B quiescat, particula autem fluidi in punctum B incidens censenda sit venisse expuncto e, sumta E e = B b, & sic de omnibus guttulis. Igitur loco fluidi D E B A in planum motum A B incidentis velocitate E B concipiendum erit fluidum $d\, e$ B A in idem planum A B sed immotum incidens velocitate e B: Producatur jam A B usque in b agaturque D E $d\, e\, b$ perpendicularis ad E B, erit motus particulæ fluidi repræsentatus per e B resolvendus in $e\, g$ & g B, sibi invicem perpendiculariter insistentes, quorum posterior nihil in planum A B agit, alter vero $e\, g$ rursus ex duobus compositus est motibus $e\, f$ & $f\, g$, quorum posterior $f\, g$ planum A B inutiliter in directione E B propellere tentat; dum prior $e\, f$ solus idem planum in directione B b propellit. Demonstratum itaque est, quamlibet particulam facere impulsum proportionalem lineæ $e\, f$: Dein patet quoque, si linea A B repræsentet totum planum, fore numerum particularum dato tempore in planum impingentium repræsentandum per lineam B N perpendicularem ad A d seu B e. Unde tandem nisus aquarum ad movendum planum in directione B b est proportionalis lineæ $e\, f$ ductæ in B N.

Ut

Ut jam determinetur inclinatio plani ad fluidum ſub his circumſtantiis maxime favorabilis ut motus plani in directione Bb promoveatur: ponemus $AB = 1$, DE ſeu $AC = x$, $BC = \sqrt{1-xx}$; lineam EB, quæ repræſentat motum fluidi, $= v$, & Bb ceu menſuram motus plani $= V$; atque ſic inſtituto calculo invenitur

$$ef = xv\sqrt{(1-xx)} - (1-xx)V, \text{ atque } BN = [xv - V\sqrt{(1-xx}]: \sqrt{(vv+VV)}; \text{ unde } ef \times BN = [xv - V\sqrt{(1-xx)}]^2 \times \frac{\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{(vv+VV)}},$$

quæ quantitas maxima erit, cum ſit

$$(9v^4 + 18vvVV + 9V^4)x^6 - (12v^4 + 30vvVV + 18V^4)x^4 + (4v^4 + 16vvVV + 9V^4)xx - 4vvVV = 0.$$

§. 40. Calculus ratione inclinationis alarum in moletrinis alius eſt, quia velocitates in diverſis alarum locis variæ ſunt; ſunt enim proportionales diſtantiis à centro, facile autem nunc cuivis erit computum pro moletrinis inſtituere, huic caſui non ulterius inſiſtam, ſufficiat id notaſſe, quod non ſatis accurate ſtatuatur ab auctoribus $xx = \frac{2}{3}$, & quod verus valor ipſius x ſemper minor ſit quam $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Si fuerit v. gr. $V = v$, & omnia alæ puncta ſimili velocitate moveri cenſeantur, fiet $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, quod indicat inclinandam eſſe alam ad directionem venti ſub angulo ſemirecto. Optima alarum conſtructio foret, ſi incurvarentur, ita, ut ſub angulo minori ventus in illas impingat ſuperius quam inferius, aut ſi fiat ut alæ ubique ventum ſub angulo medio quinquaginta præterpropter graduum excipiant.

§. 41. Pergo ad alterum caſum, quo omne fluidum à plano, utcunque id inclinatum ſit, excipi ponitur. Hic autem patet; quia numerus particularum dato tempore impellentium ſemper idem eſt, nullam eſſe attentionem faciendam ad linem BN, atque ſic niſum quem aquæ faciunt ad movendum planum AB in directione Bb ſimpliciter repræſentari per ef ſeu $xv\sqrt{1-xx} - (1-xx)V$. Igitur niſus iſte maximus obtinebitur ſumendo $xx = \frac{1}{2} + \frac{V}{2\sqrt{(vv+VV)}}$, atque erit ipſe niſus tunc $= \frac{1}{2}\sqrt{(vv+VV)} - \frac{1}{2}V$, ſi per v intelligatur preſſio directa, quam vena exerit in planum cui perpendiculariter occurrit.

§. 42. Conſideremus nunc venam $DEBA$ tanquam immediate ex ori-

 ficio

ficio D in figura 54. egreſſam & vocemus rurſus directam preſſionem venæ ita conſideratæ p, ſicut §. 33; atque erit niſus iſtius aquæ, quo conatur planum debito modo, ut niſus maximus fiat, inclinatum propellere in directione ad venam perpendiculari $= \frac{p}{2v} \times (\sqrt{vv+VV} - V)$: Et ſi porro iſte niſus multiplicatur per velocitatem plani V atque tempus, obtinetur *potentia abſoluta*, qua planum eadem velocitate per idem temporis ſpatium moveri queat; ſic igitur præfata *potentia abſoluta* erit $= \frac{pVt}{2v} \times (\sqrt{vv+VV} - V)$.

§. 43. *Potentia abſoluta*, quam modo definivimus, ita eſt comparata, ut continue creſcat creſcente V, atque ſi velocitas V infinita ſumatur, fit eadem potentia $= \frac{1}{4} \times pvt$. Igitur cum in figura 54 vena DG uti volumus ad rotandam machinam per impulſum obliquum, nunquam plusquam quarta pars obtineri poteſt illius *potentiæ abſolutæ*, quæ in elevationem aquarum ex C in EF impenditur. Impulſu vero directo, nunquam plus quam $\frac{4}{27}$ obtineri vidimus §. 37. Ergo effectus fere duplo major impulſu obliquo ſeu motu rotæ horizontali quam impulſu directo, ſeu motu rotæ verticali obtineri poteſt.

Si vero impulſus fluidorum aliter æſtimetur quam §. 31. indicatum fuit, erit ubique in eadem ratione mutandus valor litteræ p, qua impulſus æſtimatio fuit mutata.

Experimentum, de quo §. 27. *ſect.* 9, mentionem feci, hoc eſt. Nempe unus operarius ope antliæ intra ſeptem minuta prima cum dimidio pedes cubicos ſedecim cum dimidio ad altitudinem quatuordecim pedum evexit.

Iſte vero effectus æqualiter diſtributus æquivalet huic actioni, qua dimidius præter propter pes cubicus ſingulis minutis ſecundis elevatur ad altitudinem unius pedis: Hic igitur effectus dimidius admodum eſt illius, quem hominem ſanum & robuſtum calcatura dare poſſe ex aliis deduxi principiis in paragrapho decimo ſeptimo. Non crediderim defectum petendum eſſe omnem à decrementis, quæ in *potentiam abſolutam* ex variis cauſis in iſta ſectione expoſitis cadere poſſunt, ſed potius ab eo, quod plus defatigentur homines ab agitatione emboli in antlia, quam à calcatura in rota calcatoria.

Ex-

Experimentum plane simile, sed cum antlia longe perfectiori artificioque singulari fabricata, ante aliquot demum menses Genevæ sumsi præsentibus Viris Clarissimis D. D. De la Rive, Calendrin, Cramer & Jalabert Acad. Genev. Profess. successus experimenti talis fuit, ut intellexerim operarium unum singulis minutis secundis quatuor quintas partes unius pedis cubici ad altitudinem unius pedis elevasse vel potius effectum æqualem præstitisse. Notabile est experimentum, nec puto ulla alia machina effectum obtineri posse admodum majorem. Mirabile quoque id est, quod sic omnis generis machinas, quacunque potentia animatas, si obstacula demas effectum haud multo dissimilem præstare appareat. Re bene perpensa statuo, hominem machina perfectissima singulis minutis secundis pedem cubicum aquæ ad altitudinem unius pedis elevare posse aut effectum similem producere.

Huc etiam pertinerent, præsertim ratione paragraphi trigesimi primi, experimenta quæ accuratissime institui ad æstimandum impetum venæ fluidæ in planum impingentis, quibus confirmatus fui in theoria nova, quam hac de re stabiliveram simulque edoctus, errorem è Mariotti temporibus communem fuisse commissum. Quia vero in fine hujus sectionis hac de re non disertè sermo fuit, atque in sectione decima tertia expresse eam pertractare animus est, ideo eo usque disquisitiones hasce, ex principiis mechanicis nondum observatis, erutas differemus.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO DECIMA.
De affectionibus atque motibus fluidorum elasticorum, præcipue autem aëris.

§. I.

Fluida nunc elastica consideraturis licebit nobis talem iis affingere constitutionem, quæ cum omnibus adhuc cognitis conveniat affectionibus, ut sic ad reliquas etiam nondum satis exploratas detur aditus. Fluidorum autem elasticorum præcipuæ affectiones in eo positæ sunt: 1°. ut sint gravia, 2°. ut se in omnes plagas explicent, nisi contineantur, & 3°. ut se continue magis magisque comprimi patiantur crescentibus potentiis compressionis: Ita comparatus est aër, ad quem potissimum præsentes nostræ pertinent cogitationes.

§. 2. Finge itaque vas cylindricum verticaliter positum A C D B
Fig. 56. (Fig. 56.) atque in illo operculum mobile E F, cui pondus P super incumbat: contineat cavitas E C D F corpuscula minima motu rapidissimo hinc inde agitata: sic corpuscula, dum impingunt in operculum E F idemque suis sustinent impetibus continue repetitis fluidum componunt elasticum quod remoto aut diminuto pondere P sese expandit: quod eodem aucto condensatur & quod in fundum horizontalem C D haud aliter gravitat, ac si nulla virtute elastica esset præditum: sive enim quiescant corpuscula sive agitentur, non mutant gravitatem, ita ut fundum tum pondus tum elasticitatem fluidi sustineat. Tale igitur fluidum quod cum primariis convenit fluidorum elasticorum affectionibus substituemus aëri, atque sic alias, quæ jam in aëre detectæ fuerunt explicabimus aliasque nondum satis perpensas ulterius illustrabimus proprietates.

§. 3. Corpuscula cavitati cylindri inclusa considerabimus tanquam numero infinita, & cum spatium ECDF occupant, tunc aërem illa dicemus formare naturalem, ad cujus mensuras omnia sunt referenda: atque sic pondus

dus P operculum detinens in situ E F non differt à pressione Atmosphæræ superincumbentis, quam proinde per P in sequentibus designabimus.

Notetur autem hanc pressionem minime æqualem esse ponderi absoluto cylindri verticalis aërei operculo E F in atmosphæra superincumbentis, quod hactenus inconsiderate affirmarunt auctores: sed est pressio ista æqualis quartæ proportionali ad superficiem terræ, magnitudinem operculi E F & ponderi totius atmosphæræ in superficiem terræ.

§. 4. Quæratur jam pondus π, quod aërem E C D F in spatium e C D f condensare valeat, positis velocitatibus particularum in utroque aëre, naturali scilicet & condensato, iisdem: sit autem E C $= 1$ & e C $= s$: Cum vero operculum E F transponitur in $e\,f$, majorem à fluido patitur nisum duplici modo: *primo* quod numerus particularum ratione spatii, cui includuntur, major nunc est, & *secundo* quod quævis particula sæpius impulsum repetit: ut recte calculum ponamus incrementi, quod à *prima* pendet causa, particulas considerabimus ceu quiescentes, atque numerum earum, quæ operculo in situ E F sunt contiguæ, faciemus $= n$, & erit numerus similis pro situ operculi in $ef = n : \left(\frac{eC}{EC}\right)^{\frac{2}{3}}$, seu $= n : s^{\frac{2}{3}}$:

Notetur autem fluidum à nobis considerari non magis condensatum in parte inferiori, quam in superiori, quale est, cum pondus P veluti infinitè majus est pondere proprio fluidi: Perspicuum hinc est, hoc nomine vim fluidi esse, ut sunt numeri n & $n : s^{\frac{2}{3}}$, id est, ut $s^{\frac{2}{3}}$ ad 1. Quod vero attinet ad alterum incrementum à *secunda* proveniens *causa*, invenitur id respiciendo motum particularum; atque sic apparet impulsus eo sæpius fieri, quo propius ad se invicem sitæ sunt particulæ: Erunt scilicet impulsuum numeri reciproce ut distantiæ mediæ inter superficies particularum: Istæque distantiæ mediæ ita determinabuntur.

Particulas ponemus esse sphæricas, distantiamque mediam inter centra globulorum pro situ operculi E F vocabimus D; diametrumque globuli designabimus per d: ita erit distantia media inter superficies globulorum $=$ D $- d$: patet vero in situ operculi ef fore distantiam mediam inter centra globulorum $= D\sqrt[3]{s}$, atque proinde distantiam mediam inter superficies globulorum $= D\sqrt[3]{s} - d$. Igitur respectu secundæ causæ erit vis aëris naturalis E C D F ad vim aëris compressi e C D f ut $\frac{1}{D-d}$ ad $\frac{1}{D\sqrt[3]{s}-d}$, seu ut $D\sqrt[3]{s}-d$ ad $D-d$: Conjunctis vero ambabus caussis erunt prædictæ vires, ut $s^{\frac{2}{3}}\times(D\sqrt[3]{s}-d)$ ad $D-d$.

Rationi D ad d aliam substituere possumus magis intelligibilem: nempe si putemus operculum E F pondere infinito depressum descendere usque in situm mn, in quo particulæ omnes se tangunt, atque lineam mC vocemus m, erit D ad d ut 1 ad $\sqrt[3]{m}$, quâ ratione substituta, erunt tandem vires aëris naturalis E C D F & compressi e C D f ut $s^{\frac{2}{3}}\times(\sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{m})$ ad $1-\sqrt[3]{m}$, seu ut $s-\sqrt[3]{mss}$ ad $1-\sqrt[3]{m}$. Est igitur $\pi = \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{mss}}\times P$.

§. 5. Ex omnibus phænomenis judicare possumus aërem naturalem admodum condensari posse, & fere in spatiolum infinite parvum comprimi; facta igitur $m = o$, fit $\pi = \frac{P}{s}$, ita ut pondera comprimentia sint fere in ratione inversa spatiorum, quæ aër diversimode compressus occupat; quod multiplex experientia confirmavit. Et potest certe hæc regula tuto accipi in aëre rariore quam est naturalis; an vero etiam possit in aëre admodum densiori, non satis exploratum habeo: nec dum enim fuerunt experimenta ea accuratione, quæ hic requiritur, instituta: unico opus est ad definiendum valorem litteræ m, sed eo accuratissime instituendo & quidem cum aëre vehementer compresso; gradus autem caloris in aëre, dum comprimitur, sollicitè invariatus conservetur.

§. 6. Elasticitas interim aëris nonsolum à condensatione augetur, sed & ab aucto calore, & quia constat calorem intendi ubique crescente motu particularum intestino, sequitur, elasticitatem aëris spatium non mutantis auctam, intensiorem arguere motum in particulis aëris, quod cum hypothesi nostra recte convenit: perspicuum enim est, eo majus requiri pondus P ad continendum aërem in situ E C D F, quo majori velocitate particulæ aëreæ agitantur: Imo non difficile est videre pondus P secuturum rationem duplicatam istius velocitatis, ideo quod ab aucta velocitate tum numerus impetuum tum intensitas eorundem æqualiter crescat, utrumq; vero seorsim proportionale sit ponderi P.

Igitur

Igitur ſi velocitas particularum aërearum dicatur v, erit pondus, quod in ſitu operculi E F ſuſtinere valet, $= vvP$ & in ſitu $ef = \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{mss}} \times vvP$, vel proxime $= \frac{vvP}{s}$, quia ut vidimus m numerus admodum exiguus eſt ratione unitatis & numeri s.

§. 7. Iſtud theorema, quod in præcedente paragrapho appoſui, quo nempe indicatur, *in omni aëre cujuſcunq; denſitatis ſed eodem caloris gradu prædito elaſticitates eſſe ut denſitates, atq; proinde etiam incrementa elaſticitatum, quæ fiunt à calore æqualiter aucto proportionalia eſſe denſitatibus*, Iſtud, inquam, theorema experientia edoctus fuit D. Amontons idemque recenſuit *dans les mémoires de l'Acad. R. des Sc. de Paris pour l'année* 1702. Senſus iſtius theorematis eſt, ſi v. gr. aër naturalis mediocris caloris pondus 100 lb. datæ ſuperficiei impoſitum ſuſtinere valeat, atque deinde calor ipſius augeatur donec 120 lb. eadem ſuperficie eodemque volumine ferre poſſit, fore ut idem aër in dimidium ſpatium condenſatus, & iiſdem caloris gradibus præditus reſpective ferre poſſit 200 lb. & 240 lb. ita ut incrementa 20 lb. & 40 lb. utrobique ab aucto calore genita ſint denſitatibus proportionalia. Affirmat porro aëris, quem vocat temperatum, elaterem eſſe ad elaterem aëris ejusdem cum aqua bulliente caloris, proxime ut 3. ad 4 vel accuratius ut 55 ad 73. At ego inſtitutis experimentis cognovi aërem calidiſſimum, qualis maxime fervente in hiſce terris eſt æſtate, tanti nondum eſſe elateris, quantum D. Amontons aëri tribuit temperato; imo nec ſub ipſo æquatore aërem unquam ejus eſſe caloris mihi perſuadeo. Meis autem magis fidendum eſſe puto experimentis quam Amontonianis, ideo quod in his aër non conſervarit ſuum volumen ejuſque variationis nulla ab Auctore habita fuerit ratio in calculo. Aëris qui hic Petropoli frigidiſſimus fuit die 25. Decembr. 1731. st. vet. elaterem deprehendi eſſe ad elaterem ſimilis aëris, communi cum aqua bulliente calore præditi, ut 523 ad 1000.

Sed anno 1733. d. 21. Jan. multo intenſius fuit frigus eique reſpondere obſervavi aëris elaſticitatem infra dimidiam ejus quam habet ſimilis aër ad aquam bullientem calefactus. Sed cum eſſet maximus aëris calor in loco umbroſo ann. 1731. elaſticitatem habuit proxime $\frac{4}{3}$ & accuratius $\frac{100}{76}$, ejus quam habuit aër frigidiſſimus & $\frac{2}{3}$ ejus quam habet aër ejusdem cum aqua bulliente caloris: maximæ igitur caloris variationes in aëre hic locorum continentur intra terminos 3 & 4, quos in Anglia non ultra terminos 7 & 8 excurrere legi. Calor autem aëris, cujus elaſticitas tres quartas exæquet partes elaſticitatis aëris inſtar aquæ bullientis calidi, corpori animali fere intolerabilem eſſe puto.

§. 8. Ex cognita ratione inter diverſas ejusdem aëris eodemque ſpatio incluſi elaſticitates, facile eſt deducere menſuram caloris, qui ad aërem pertineat, ſi modo conveniamus in definiendo calore duplo, triplo &c. quæ definitio arbitraria eſt, neque in rerum natura poſita; mihi quidem videtur non incongrue aëris calorem ſi communis ſit denſitatis proportionalem ſtatui ejus elaſticitati. Primus autem caloris gradus, à quo reliqui menſuram accipiant, ſumetur ab aqua pluviali bulliente, quia huic procul dubio ubique terrarum idem proxime caloris gradus eſt.

His ita acceptis erunt calores aquæ bullientis, aëris tempore æſtivo calidiſſimi & aëris tempore hyemali frigidiſſimi in hiſce terris proxime ut 6, 4 & 3. Dicam nunc quemadmodum hoſce invenerim numeros, ut de accuratione experimentorum, quorum ſucceſſus ab Amontonianis diverſus admodum eſt, judicium ferri poſſit.

Fig. 57. §. 9. Barometro nempe uſus ſum ordinario A C B E, (Fig. 57.) idque hermetice ſigillari curavi in m; hoc modo inſtrumentum mutavi in thermometrum aëreum mutationibus barometricis non obnoxium: Creſcente enim calore intenditur elaterium aëris A m F altiorque fit columna mercurii B D, quam aër captus ſuſtinet & ſi ſpatium A m F veluti infinitum cenſeri poſſet, eſſet calor in ratione altitudinis B D (per §. §. 7. & 8.) atque hujus thermometri ope poterit menſura caloris ubique ſpecifice definiri. Si enim immergatur inſtrumentum aquæ bullienti pluviali in ſitu verticali obſerveturque punctum G ad quod ſuperficies mercurii aſcendit; fueritque deinde alius caloris gradus qualiscunque definiendus, qui mercurium ſuſtinuiſſe ad punctum D usque obſervatus fuerit, erit utique calor iſte ad calorem aquæ ferventis ut B D ad B G. Et cum ratio B D ad B G conſtans ſit, quæcunque fuerit altitudo B G, erit idem caloris gradus, de quo ſermo eſt, ubique locorum facile imitabilis. Poterit autem B G in centum aut mille dividi particulas atque hujusmodi particulis altitudo B D definiri.

Nihil

Nihil dico de modis hujusmodi thermometra sensibiliora reddendi; eorum quisque facile excogitabit plures, qui volet. Curetur autem, ut altitudo B E non sit infra 4 pedes, imo ut major sit, si etiam aliorum fluidorum bullientium gradus caloris, qui sæpe major est quam in aqua, experiri animus sit. Si minora hujusmodi thermometra desiderentur, poterunt ea ita fieri, ut tempore sigillationis in *m* ampulla vitrea A F igni lampadis apponatur ad rarefaciendum aërem in illa contentum, tuncque protinus sigillatio fiat, & ne sigillationi mora injiciatur, poterit prius ampulla vitrea in tubulum capillarem duci, qui vel leviter flammæ admotus illico colliquescat. Hoc modo thermometra obtinui non ultra quatuor aut sex pollices longa, sed parvæ virtutis. Cæterum multum refert, ut spatium E D sit ab omni aëre, quantum fieri potest, vacuum, neque de isto vacuo satis certi erimus cum viderimus in situ instrumenti horizontali mercurium extremitatem E attingere, quia fieri potest, ut aër, qui antea in spatio E D fuit, sese in poros mercurii recipiat, rursusque pristinum spatium occupet descendente mercurio: tutius erit examen admovendo partem D E flammæ: si enim à calore flammæ superficies D locum non mutet, indicium erit certum vacuum esse ab aëre spatium E D.

§. 10. In præcedente paragrapho consideravimus spatium A *m* F ab aëre occupatum veluti infinitum ratione spatii D G aut D E: Quod si vero fuerit tantum octuplo vel decuplo majus, nondum licebit illud sine notabili errore tanquam infinitum considerare: atque hinc conjicio ortum esse errorem aliquem in definiendo elatere aëris mediocriter calidi in experimentis Amontonianis.

Ut igitur accuratissime fiat experimentum, ita procedendum erit: Fuerit superficies mercurii inferior in A F ducaturque horizontatis in A L: deinde pro caloris gradu qualicunque definiendo inclinetur instrumentum, donec superficies mercurii sit in puncto *g*, (quod idem est in quo mercurius subsistebat à gradu caloris aquæ ferventis in situ thermometri verticali) tuncque capiatur mensura altitudinis verticalis *g h*, quæ erit ad altitudinem G B vere ut elater aëris, cujus calor definiendus est, ad elaterem aëris instar aquæ ferventis calidi. Sic igitur calores erunt proprie in ratione altitudinem *g h*. Priusquam hoc argumentum abrumpam, notasse conveniet (quandoquidem aliquibus fortasse videbitur *primum*, qui à nobis positus fuit, *caloris gradum* ab aqua bulliente desumtum non semper nec ubique sibi omnino constare) quod

 loco

loco caloris aquæ bullientis thermometrum etiam possit certis & fixis mensuris fieri, si experimento densitas aëris exploretur seu ejus gravitas specifica simulque altitudo barometri notetur. Si enim thermometrum inclinetur, donec superficies mercurii fuerit in g & eo tempore altitudo barometri fuerit 28. *poll. Paris.* atque pes cubicus aëris, in quo thermometrum positum est, pondus habuerit 600. gran. Norimb. poterit altitudo verticalis $g\,b$ ceu *primus* caloris gradus considerari. Si autem alio loco & tempore altitudo barometri fuerit 29. *poll. Paris.* & pondus pedis cub. aëris, qui ambit aliud thermometrum (in quo *primum* caloris *gradum* definire animus est) sit 500. gran. Norimb. ac denique superficies mercurii in thermometro rursus sit in g, erit altitudo verticalis primo caloris gradui conveniens $\frac{29.600}{28.500} \times g\,b$. In usu thermometri inclinetur semper instrumentum, donec superficies mercurii sit in g: Volui methodum hanc apponere ut appareret quam facile sit in theoria fixam dare caloris mensuram: In praxi vero alteram multo faciliorem satisque accuratam huic prætulerim.

§. 11. Veniamus nunc ad aëris considerandam atmosphæram, quæ non à superincumbente pondere alieno, sed propria coërcetur mole: *Primò* autem examinabimus pressiones columnarum aërearum verticalium atque æquilibria earum tum inter se tum cum columna mercuriali in barometris: *Secundò* elasticitates aëris in variis atmosphæræ altitudinibus supra mare atque altitudines respondentes barometricas rimabimur: Atque his præmissis, plurimis satisfaciemus phænomenis aliis ad mutationes atmosphæræ pertinentibus.

§. 12. Sint duo tubi æqualis amplitudinis verticales A C & B D
Fig. 58. (Fig. 58.) uterque indefinitæ altitudinis: Deinde finge tubulos strictiores horizontales ab, cd, ef, gh, lm, *&c.* numero veluti infinitos, utrinque apertos & hiantes in tubos verticales. Puta præterea ubique aëreas particulas hos tubos occupantes eadem velocitate agitari, eundemque adeo caloris gradum habere: Ita dubium nullum est, quin funda A & B æqualiter premantur simulque ipsis æquale pondus (quod scilicet ipsum est pondus columnæ aëreæ indefinitæ A C vel B D) superincumbat.

Intelligis etiam, si in æqualibus altitudinibus veluti in g & h diaphragmata fingas atque abesse putes aërem inferiorem g A & h B, etiamnum ista diaphraphragmata utrinque æqualiter premi & æqualia esse pondera columnarum aërearum g C atque b D diaphragmatibus superjacentium. Si igitur pondus totius columnæ aëreæ A C vel B D dicatur A, & pondus columnæ aëreæ g C vel b D ponatur B, erit pondus aëris inter A & g sive B & b intercepti $=$ A $-$ B, pondus fundo A vel B superjacens $=$ A, & pondus diaphragmati in g vel b incumbens $=$ B.

§. 13. At si inæquali velocitate in tubis A C & B D particulæ agitentur, res alia erit: tamen quæcunque fingatur velocitatum & calorum in singulis locis diversitas, patet nihilominus utrobique æqualiter pressum iri partes tubi in eadem altitudine positas, veluti in g & b, atque proinde diaphragmata, si fingantur utrobique in eadem altitudine posita, æqualem pressionem sustentura esse. Si enim dicas minorem esse pressionem in g quam in b, nihil erit quod fluxum aëris ex B D in A C per tubulum transversum bg impediat, sicque ista positio contra statum *permanentiæ*, quem supponimus, pugnabit.

Cum itaque loca in eadem altitudine posita æqualiter à superincumbente aëre premantur, erunt (p. §. 6.) densitates in locis homologis quibuscunque, veluti in g & b, proxime in reciproca ratione quadrata velocitatum, quibus in illis locis particulæ agitantur.

§. 14. Consequens est ex præcedente paragrapho, ubique locorum eandem esse aëris pressionem in æqualibus à superficie maris altitudinibus, si atmosphæra in statu permanente æquilibrii posita nullisque agitata ventis putetur, quæcunque fuerit caloris differentia in diversis atmosphæræ partibus: Igitur ubique terrarum sub æquatore & sub polo eadem sit oportet altitudo mercurii in barometris, quæ in superficie maris aut in æqualibus super illam altitudinibus posita sunt, si atmosphæra nullis obnoxia sit mutationibus. Pono autem aquas à superficie maris terminatas ad commune æquilibrium esse positas, non quod id omnino necesse sit, sed quod nulla adhuc observata fuerit differentia: imo cursus (*les courans*) aquarum in multis oceani locis, qui ad eandem perpetuo diriguntur plagam, hanc hypothesin non omni rigore accipiendam esse ostendunt.

§. 15. Jam notavi densitatem aëris in quovis tuborum verticalium loco pendere à calore respondente: Et cum diversi esse possint caloris gradus manente

nente æquilibrio, diverſæ quoque eſſe poterunt denſitates: ponantur itaque denſitates in $g = D$, in $b = \delta$; finganturque utrobique duo ſtrata altitudinis æqualis & infinitè parvæ dx, poſita altitudine Ag vel $Bb = x$: Ita erit pondus columnæ aëreæ $Ag = \int D\,dx$ & columnæ $Bb = \int \delta\,dx$: atque hoc modo poterit tum integræ columnæ tum cujusvis partis pondus definiri: Interim apparet, minime requirere rei naturam, ut ſint pondera columnarum AC & BD vel Ag & Bb vel denique gC & bD inter ſe æqualia, quamvis (per §. 13.) preſſiones tam in funda A & B quam in diaphragmatr g & b ſint inter ſe æquales; mirum id primo intuitu quibusdam fortaſſe erit, fieri poſſe ut fundum A aliam ſuſtineat preſſionem quam eſt pondus columnæ aëreæ indefinitæ AC ei ſuperincumbentis, quandoquidem omnibus in ſtatu ſuo permanentibus, ut fere videtur, concipi poſſint orificia a, c, e, g, &c. ſingula obturata, quo ſane in caſu dubium nullum eſt, quin preſſio fundi A ſit ipſum columnæ aëreæ ſuperjacentis pondus: hunc vero ſcrupulum ſibi quisque eximet hunc in modum: fingamus utramque columnam terminatæ altitudinis (quamvis enim ſine fine aſſurgant quamdiu particulæ motum aliquem ſervant, attamen terminatæ erunt, ſi eædem particulæ in ſuprema columnarum parte motu deſtitutæ ſint, ſicque ſimplex fluidum grave omni elaſticitate deſtitutum efficient) hoc poſito apparet 1°. columnam utramque ad communem aſſurgere altitudinem apertis tubulis transverſalibus, qui ubique adſunt. 2°. ſuprema ſtrata utrobique eſſe æque denſa, quia ſunt ad æquilibrium poſita & communem habent altitudinem. Ex hoc jam obvium eſt, quare non liceat tubulos transverſales conſiderare ceu obturatos, quod oſtendere conſtitui. Perſpicuum quoque eſt ex ſe, preſſiones ubique proportionales eſſe ponderi ſupremi ſtrati, ex quo conſequens eſt, quod jam §. 13. indicatum fuit, preſſiones ab utraque parte æquales inter ſe eſſe ſub æqualibus altitudinibus. Si jam columnæ nusquam terminatæ ſint, licebit mente ultima concipere ſtrata aut ſub æqualibus altitudinibus diaphragmata fingere utrobique æquali pondere onerata, ſic ut nihil vi demonſtrationis inde decedat.

§. 16. Igitur quum in barometro ex loco humiliori veluti A in altiorem g transportato mercurius deſcendit, non ſequitur pondus columnæ mercurialis, quæ in barometro deſcendit æquale eſſe ponderi columnæ aëreæ ejusdem diametri & altitudinis Ag, quod ab aliquibus ita aſſeritur. Et profecto cæteris paribus columna mercurii deſcendens eadem erit tam tempore hye-

hyemali quam æstivo cum ex sententia illa deberet tempore calido esse minor, quam tempore frigido: Eadem quoque erit in locis meridionalibus & septentrionalibus.

Patet exinde quid censendum sit de illa methodo, qua in Anglia aliquando usos esse recenset D. *Du Hamel in hist. Acad. Sc. Paris.* ad indagandam rationem inter gravitates specificas aëris & mercurii: Observata nimirum altitudine mercurii in loco humiliori, tum etiam in altiori, gravitates specificas in aëre & mercurio statuerunt, ut erat differentia altitudinum mercurii in barometro ad altitudinem inter locos observationum interceptam: Etiamsi aër ejusdem densitatis ponatur ab imo observationis loco ad alterum usque, non licet tamen inde judicare de ejus gravitate specifica ratione mercurii. Quicquid ab experimento colligere licet, hoc solum est:

Consideremus scilicet integram crustam aëream terram ambientem atque inter ambo observationis loca interceptam, & erit pondus istius crustæ ad superficiem terræ, ut pondus columnæ mercurialis, qualis in barometro descendit ad basin ejus; Manifesta hæc sunt ex eo quod summa basium A & B sustinent quidem summam ponderum, quæ habent columnæ aëreæ AC & BD, neque tamen quævis basis premitur suæ columnæ pondere seorsim, & quod idem resectis columnis Ag & Bb intelligi debet de columnis gC & bD, diaphragmatis in g & b positis, incumbentibus. Igitur experimentum non tam gravitatem specificam aëris, in quo factum est, indicat quam omnis aëris terræ proximi gravitatem specificam *mediam* determinat; prior admodum variabilis est, altera procul dubio constanter eadem fere permanet.

Faciamus computum *gravitatis specificæ* istius *mediæ* aëris omnis, qui terram ambit: Multis vero experimentis, quæ in diversis locis parum supra mare elevatis sumta fuerunt, id constat, elevationi 66 pedum proxime descensum respondere unius lineæ in barometro. Sequitur inde, quod aëris gravitas specifica media ratione mercurii sit, ut altitudo unius lineæ ad altitudinem 66. ped. id est, ut ut 1 ad 9504; ergo posita gravitate specifica mercurii = 1, erit gravitas specifica *media* aëris = 0, 000105. Notabile est profecto tantam esse hanc gravitatem mediam aëris: certus enim sum vel maxime sæviente hic locorum frigore, aëris gravitatem specificam vixdum tantam esse, quantam nunc exhibuimus pro statu medio omnis aëris terram ambientis: at sub æquatore multo erit minor & omnibus recte perpensis non crediderim *gravitatem mediam* aëris, qui inter utramque latitudinem 60. gr. continetur, ultra 0, 000090 excurrere; quo posito erit *gravitas media* aëris ab utroque polo ad 30. gradus, terram cingentis, (quod spatium paullo plusquam octavam totius terræ superficiei efficit partem) = 0, 000210, quæ dupla est aëris hic locorum densissimi: sub ipso autem polo, præsertim antarctico admodum gravior erit aër & fortasse aqua vix decies levior, cum est frigidissimus atque densissimus.

§. 17. Veniamus nunc ad mutationes tum atmosphæræ tum barometri: Considerabimus ergo duo barometra utrobique in imo aëris loco posita, alterum in A, alterum in B, & in utroque mercurium ad eandem altitudinem suspensum ponemus: Postea in A subito aërem admodum calefieri fingamus: Ita videmus fore, ut idem aër rarefiat: neque tamen inde ulla barometri mutatio proditura esset, si nullam aër haberet inertiam ad motum, etiamsi omnis aër ex AC in BD transpellatur: posita autem ista inertia supervenit quædam pressio in omnes plagas eaque maxime sensibilis in regione A. Crescet igitur ad tempus altitudo mercurii in utroque barometro, magisque crescet in A quam in B. Contrarium erit, si extemplo magna quædam aëris massa barometro A vel B vicina à frigore condensetur.

§. 18. Hæc unica videtur causa, quæ aliquam in barometris in A vel B positis, efficere possit mutationem, quia hàc remotâ funda A & B semper æqualiter premuntur, nempe unusquisque pondere, quod sit dimidium columnarum aërearum AC & BD simul sumtarum, quæ quidem ponderum summa constans est. Si hæc ad atmosphæram applicare velimus, notandum est funda A & B repræsentare loca ima atmosphæræ, quæ quidem in superficie terræ posita forent, si aër terræ viscera penetrare nequiret: quia vero res secus se habet, erunt loca fundis A & B analoga intra superficiem terræ censenda.

§. 19. Putentur nunc barometra in g & b posita; sitque in ambobus mercurius ad eandem altitudinem suspensus: his positis causa fingatur supervenire, qua columna Ag sive sola sive conjunctim cum socia Bb calefiat atque sese expandat. His perspicuum est, si vel nulla aëris sit inertia fore, ut pressiones aëris in g & b crescant, quia his locis major nunc aëris quantitas supereminet quam antea; accessit nimirum pondus omnis aëris, qui ex Ag & Bb à calore fuit sursum propulsus. Atque ut hæc symbolis indicemus, faciemus pondus

dus columnæ Ag, antequam novus caloris gradus superveniret, $= A$, alterius $Bb = \alpha$, pondus columnæ $gC = B$, columnæ $bD = \mathfrak{C}$: pondus columnæ Ag rarefactæ $= C$, pondus columnæ Bb itidem rarefactæ $= \gamma$: altitudo mercurii in g ante expansionem aëris Ag & $Bb = l$, altitudo similis post istam expansionem $= x$ & habebimus hanc analogiam
$B + \mathfrak{C} : l :: B + A - C + \mathfrak{C} + \alpha - \gamma : x$: unde est

$$x = \frac{B + A - C + \mathfrak{C} + \alpha - \gamma}{B + \mathfrak{C}} l.$$

Igitur ascendet mercurius ab rarefacto aëre inferiore per altitudinem $x - l = \frac{A - C + \alpha - \gamma}{B + \mathfrak{C}} l =$ (positis omnibus in utroque tubo paribus) $\frac{A - C}{B} l$.

Refrigescente autem rursus aëre in Ag & Bb iterum descendet mercurius in utroque barometro.

Notandum hic est, posse hoc modo à parvula caloris mutatione in Ag atque Bb notabilem oriri in barometro variationem ob insignem aëris densitatem in partibus inferioribus, qua fieri potest, ut in parte Ag multo plus aëris contineatur (imo infinities, si aër vi infinita pressus in infinitè parvum spatium condensari ponatur) quam in reliqua gC, etiamsi longitudine infinita. Unde si pondus A admodum majus sit pondere B, simulque manente causa aërem rarefaciente, pondus C datam servet rationem ad A, quod ita fere fit, apparet ascensum mercurii à minimo caloris gradu superveniente in Ag posse utcunque magnum esse.

Equidem si fingatur, partes Ag & Bb strictiores admodum esse præ amplitudinibus in gC & bD, intelligitur variationes barometi ab aucto diminutove caloris gradu in Ag & Bb ita fieri minus notabiles, quia pondera A & α ipsaque C & γ prioribus proportionalia hoc modo decrescunt; attamen variationes barometricæ, quæ ab hac causa proveniant, etiamnum utcunque magnæ concipi poterunt.

§. 20. Hæc dum ita perpenduntur, verisimile fit variationes barometricas maxima parte petendas esse à celeribus caloris mutationibus in cryptis subterraneis. Multas esse easque permagnas hujusmodi cryptas jam diu notum est: in terra etiam solida pori facere possunt quod cryptæ: si omnes cavitates (tum quæ à cavernis, tum quæ à poris aërem continentibus formantur) ad altitudinem infra ſuperficiem terræ 20000. aut 30000. pedum colligas earumque capacitatem compares cum ſoliditate cruſtæ terreſtris ejuſdem altitudinis, hancque vel millies aut centies millies altera majorem ponas, erit profecto etiamnum ſufficiens cauſa iſta ad maximas barometri mutationes explicandas. Hæc ut puto ex præcedente paragrapho unicuique perſpicua erunt.

Cæterum loca quæ ſunt cryptis propiora, ea magis & ventis & barometri mutationibus erunt obnoxia, ob aëris ad motum inertiam, quæ fortaſſe ratio eſt, quod verſus æquatorem, ubi omnia fere pontus, minores variationes in barometro obſerventur quam in locis hiſce ſeptentrionalibus.

§. 21. Ex eodem fonte deducitur, aliquid etiam ad variationes barometricas conferre poſſe exhalationes aqueas ex terræ poris : ſed certe parum id erit : ſi enim tantum aquæ vapores ſuppeditarint, quantum maxima pluria decidere poteſt, vix inde unica linea mercurius aſcendet in barometro, præterquam quod hæc cauſa non ſit ita celeris, quin illius effectus in totam atmoſphæram ſimul fere diſtribuatur, atque ſic pro certo quodam loco totus evaneſcat. Si enim totam conſideramus Atmoſphæram, quæ terram ambit, animadverti certe non poterit eſſe eam vaporibus nunc minus nunc magis oneratam. Equidem rationem §. 20. expoſitam omnibus reliquis prætulerim, magnas enim & celeres in terræ viſceribus fieri poſſe mutationes indicant terræ motus, qui ſæpe ad centum usque milliaria eodem tempore ſentiuntur, & alia hujuscemodi phænomena.

Ad mutationes barometricas explicandas imprimis requiritur cauſa quædam ſubita ; jam enim monui lentas in integram diſtribui aëris maſſam nulliusque eſſe effectus, idque demonſtravi §. 14. Atque hanc ob cauſam parvi faciendas eſſe mutationes, quæ immediate fiant in atmoſphæra ſupra terræ ſuperficiem.

§. 22. Et hæc videtur pariter cauſa quod luna, quæ tantæ eſt efficaciæ ad oceani aquas agitandas, nullum, qui obſervationibus diligentiſſimis obſervari potuerit, effectum exerat in barometrum : ſique cauſæ etiam reliquæ, quæ mutationem aliquam alicubi in Atmoſphæra producere valent paullatim agerent, foret procul dubio in omnibus locis à ſuperficie maris æque diſtantibus eadem conſtanter mercurii altitudo ad ſenſus. Hæc altitudo *media*

vocari

vocari poteſt & proxime determinabitur eo modo quo uſus eſt Joh. Jacobus Scheuchzer, obſervando quotidie altitudinem barometricam per longum temporis tractum ſumendoque inter omnes mediam.

Atque hâc circumſpectione uſus celeberrimus Auctor ex multis obſervationibus, quæ ad ipſum ex pluribus transmiſſæ fuerunt locis, poſuit altitudinem mediam.

Patavii - - - - - - 27 *poll.* $11\frac{1}{2}$ *lin. Pariſ.*
Pariſiis - - - - - - 27 *poll.* $9\frac{1}{2}$ *l.*
Turini - - - - - - 27 *poll.* $1\frac{1}{4}$ *l.*
Baſileæ - - - - - - 26 *poll.* $10\frac{1}{8}$ *l.*
Tiguri - - - - - - 26 *poll.* $6\frac{1}{2}$ *l.*
In monte Gothardi - 21 *poll.* $27\frac{1}{2}$ *l.*

§. 23. Diverſitates iſtarum altitudinum *mediarum* ab inæqualibus locorum ſupra mare elevationibus provenire notum eſt. Jam enim Paſcalii tempore experimenta ſumta fuere de deſcenſu mercurii in barometro ex loco profundiori in altiorem lato. Inde Philoſophi in mutuam cauſæ & effectus proportionem inquirere: Diverſæ in hanc rem variis auctoribus prodiere regulæ: Præcipua, cui etiamnum plurimi adhærent, hæc eſt, quod altitudines locorum proportionem ſequantur logarithmorum, qui altitudinibus barometri reſpondent. Fundata eſt hæc regula præcipue ſuper eo, quod denſitas aëris ubique proportionalis ſit ponderi aëris ſuperincumbentis: male autem hic applicatur iſtud principium, quod pro aëre ejuſdem caloris tantum valet, neque res certa eſt in omni altitudine aëris, quamvis in eadem columna verticali exiſtentis; ſi vero ita ſit, calorem æqualem eſſe, fatendum eſt, ſic ſatis recte regulam ſe habere.

At experimenta regulæ plane ſunt contraria; igitur non eſt ubique idem caloris gradus per totam columnæ aëreæ verticalis altitudinem, quod ut nunc planum faciam, apponam experimenta quædam accurate, ut mihi perſuadeo, inſtituta, ſed tamen, quod doleo, diverſis temporibus lociſque: magis utique inſtituto noſtro convenirent experimenta eodem tempore in eodemque monte, diverſis tantum altitudinibus, ſumta; talia autem, niſi pro mediocribus locorum altitudinibus, nulla adhuc quantum ſcio extant cum omnibus quæ ſcire oportet circumſtantiis. (I.)

(I) In altitudine 1070 *ped. Parif.* à fuperficie maris barometrum defcendit $16\frac{1}{3}$ *lin.* cum in fuperficie maris altitudinem teneret 28 *poll.* $4\frac{2}{3}$ *lin.* (alii ponunt fimpliciter 28 *poll.* in fchedis autem quas D. De Lisle mecum communicavit habetur 28 *poll.* $4\frac{2}{3}$ *lin.*). Igitur pofita elafticitate aëris in fuperficie maris, uti deinceps femper ponam, $= 1$; inventa fuit elafticitas in loco fuperiori quam defignabo per $E = 0,9520$.

(II) In altitudine à fuperficie maris 1542 *ped. Parif.* defcendit Mercurius in barometro $21\frac{1}{2}$ *lin.* qui in mari ad altitudinem 28 *poll.* 2 *lin.* fufpenfus hæfit: hic igitur fuit $E = 0,9364$.

(III) In altitudine montis Pici fuper Infula Teneriffa 13158 *ped. Parif.* à fuperficie maris ftetit mercurius ad altitudinem 17 *poll.* 5. *lin.* dum in fuperficie maris teneret altit. 27 *poll.* 10 *lin.* unde eo in loco fuit $E = 0,6257$.

(IV) Si in minoribus altitudinibus accurate defcenfus Mercurii obferventur, reperitur defcenfum unius lineæ refpondere altitudini 65 aut 66 *ped.* Igitur in altitudine 65 *ped.* eft $E = 0,9970$. Extant paffim hæ obfervationes: tertiam autem habeo à D^no^. De Lisle fuitque à R. P. Feuillée inftituta atque coram *Societate Reg. Scient. Parif.* prælecta: eftque illa fcopulus, ad quem omnes, quæ adhuc lucem afpexerunt, theoriæ illidunt.

§. 24. Ut jam pateat, quoufque hæc cum pofitione logarithmicæ, ceu fcalæ altitudinum elafticitatibus refpondentium conveniant, ponemus altitudinem loci à fuperficie maris certo numero pedum Parifinorum definiendam $= x$: elaterem aëris in fuperficie maris defignabimus per 1, & elaterem aëris in altitudine x ponemus $= E$. Notetur autem atmofphæram nunc nobis confiderari invariatam aut faltem fibi conftanter fimilem, ita ut elateres aëris in fuperficie maris & in altitudine quacunque x conftantem fervent rationem. Si enim admodum inæqualiter in diverfis atmofphæræ altitudinibus, nulla fervata proportione elateres inconftantia temporis mutentur, fane nulla excogitari poterit regula. His præmiffis ponamus nunc æquationem $\alpha \log. E = x$ ubi coëfficiens α unica determinabitur obfervatione: utamur obfervatione prima & erit $\alpha \log. 0,9520 = 1070$, hincque α (fecundum logarithmos Vlacquianos) $= -50194$. Igitur pro hoc negotio, fi logarithmica fatisfacere debeat ponendum effet $-50194 \log. E = x$, five $\log. \frac{1}{E} = \frac{x}{50194}$: Ad

hujus

hujus autem æquationis normam, si ponatur pro secunda observatione $x = 1542$, invenitur $E = 0,9317$, ipsa autem observatio indicat $E = 0,9364$: differentia inter hypothesin & observationem est plus quam sesquilineæ, quæ sane notabilis est respectu habito ad differentiam parvam altitudinum verticalium.

Si jam porro pro tertia observatione ponatur $x = 13158$, fit ex hypothesi $E = 0,5469$, dum experimentum indicavit $E = 0,6257$: quæ differentia nimia est, quam ut ullo modo logarithmica servari possit: valet enim hæc differentia plus quam duos pollices cum duabus lineis.

§. 25. Rejecta logarithmica consequens est elasticitates in diversis atmosphæræ altitudinibus nequaquam esse densitatibus proportionales, aut quod eodem recidit, diversum esse in diversis altitudinibus medium caloris gradum. Aliæ igitur ab aliis, quibus defectus iste probe fuit notatus, fuerunt excogitatæ regulæ: earum tamen nulla ad experimentum III. (§. 23.) satis accommodata dici potest. Veram, quam natura sequatur, legem invenire, rem esse puto vix sperandam: quis enim aliter quam levibus conjecturis assequetur rationem velocitatum mediarum in particulis aëreis: Incidi tamen forte in aliquam hypothesin, quæ phænomenis non male respondet: prius autem pro quacunque velocitatum lege curvam dabo, quam ad specialem istam hypothesin descendam.

§. 26. Sit linea verticalis AD (Fig. 59.); QF horizontalis radat superficiem maris: Denotet BF velocitatem mediam particularum aërearum in superficie maris: BM densitatem mediam & BQ elasticitatem, quæ in omni loco æque alto eadem est. Deinde per puncta F, M, Q ductæ concipiantur curvæ EFH, LMO, PQS ceu scalæ, quæ in omnibus altitudinibus, veluti BC, applicatis CG, CN, CR denotent velocitates medias particularum aërearum, densitates medias & elasticitates medias. Datis nunc duabus curvis tertiam licet determinare ex eo, quod elasticitates (ceu experientia docuit & §. §. 3. 4 5. & 6. explicatum fuit) sint proxime in ratione composita ex quadrato velocitatum modo dictarum & simplici densitatum. Fig. 59.

Ipse quidem monui prædicto loco hanc proportionem non posse exacte esse veram, quia aër quidem elaterem potest habere infinitum seu vi infinita comprimi, non potest autem in spatium plane infinite parvum condensari

ſari: quia tamen in aëre qui ſit naturali vel quadruplo denſior, hæc proprietas, *quod nempe elaſticitates ſint in ratione compoſita ex quadrato velocitatum particularum & ſimplici denſitatum* experimentis etiamnum ad ſenſus omnino reſpondere viſa fuit, illa ſine ullo ſenſibili errore uti poterimus pro aëre naturali atmoſphæræ mari incumbentis, ſiquidem eo accuratius vera ſit quo rarior eſt aër.

His ad calculum præparatis ponemus $BF = a$, $BM = b$, $BQ = c$, $BC = x$, $Cc = dx$; $CG = v$, $CN = z$, $CR = y$, & erit $y : c = vvz : aab$ ſeu $y = \frac{cvvz}{aab}$. Quia porro elaſticitatis menſura eſt pondus ſuperincumbentis aëris, erit $qR\,(-dy) =$ ponderi ſtrati aërei intercepti inter C & c, quod proportionale eſt aëris denſitati z & altitudini ſtrati dx: eſt igitur

$-dy = \frac{zdx}{n}$ ſeu $z = \frac{-ndy}{dx}$, quo valore ſubſtituto in æquatione

$\left(y = \frac{cvvz}{aab}\right)$ habetur $y = \frac{cvv}{aab} \times \frac{-ndy}{dx}$ vel

$$-\frac{dy}{y} = \frac{aabdx}{ncvv}.$$

§. 27. Si ponatur velocitas particularum aërearum in omni altitudine eadem, nempe $= a$, fiet $\frac{-dy}{y} = \frac{bdx}{nc}$, vel, facta debita integratione, $\log.\frac{c}{y} = \frac{bx}{nc}$; Iſtam vero hypotheſin non ſatis experimentis confirmari vidimus §. 24. Igitur alia tentata, poſui $v = \sqrt{(aa + mx)}$ vel $vv = aa + mx$, quæ lex eſt in motibus corporum libere cadentium: neque id ſine ſucceſſu; ita vero fit

$$\frac{-dy}{y} = \frac{aabdx}{naac + mncx}$$

$$\text{vel } \log.\frac{c}{y} = \frac{aab}{mnc}\log.\frac{aa+mx}{aa}.$$

In hac æquatione paullo generaliori in qua m & n etiamnum arbitrariæ ſunt, porro periculum feci, num non poſſet poni $\frac{aab}{mnc} = 1$, atque id etiam apte fieri vidi: ſic vero obtinui

$$\log.\frac{c}{y} = \log.\frac{aa+mx}{aa} \text{ vel } \frac{c}{y} = \frac{aa+mx}{aa} \text{ aut } \frac{y}{c} = \frac{aa}{aa+mx}.$$

In-

Indicat iſta hypotheſis eſſe elaſticitates aeris ubique in ratione reciproca quadrata velocitatum, quibus particulæ aëreæ agitantur, ſive eſſe CR ad BQ ut BF^2 ad CG^2, atque cum EFH ex hypotheſi parabola eſt ſuper axe AD verticem habens infra punctum B ad diſtantiam $\frac{aa}{m}$, ſequitur eſſe curvam PQS hyperbolam; Dictam vero diſtantiam $\frac{aa}{m}$ ſumendam eſſe $= 22000$ pedum animadverti, ut obſervationibus §. 23. proxime ſatisfiat. Inde talis jam prodit æquatio ſpecifica

$$\frac{y}{c} = \frac{22000}{22000 + x}.$$

Pro curva vero LMO invenitur $\frac{z}{b} =$ (per §. 26.) $\frac{aay}{cvv}$, ſeu (quia $\frac{aa}{vv} = \frac{22000}{22000 + x} = \frac{y}{c}$) prodit poſt hanc ſubſtitutionem

$$\frac{z}{b} = \left(\frac{22000}{22000 + x}\right)^2.$$

§. 28. Ut appareat, quouſque hypotheſis noſtra conveniat cum experimentis §. 23. ponemus in æquatione pro elaſticitatibus ſucceſſive pro x, 1070; 1542; 13158, & 65; ita invenitur *reſpective* $\frac{y}{c} = 0,9536$; $\frac{y}{c} = 0,9345$; $\frac{y}{c} = 0,6257$, atque $\frac{y}{c} = 0,99705$: obſervationes autem indicant $\frac{y}{c} = 0,9520$; $\frac{y}{c} = 0,9364$; $\frac{y}{c} = 0,6257$, atque $\frac{y}{c} = 0,9970$. Obſervatio tertia aliis hypotheſibus inimiciſſima cum noſtra plane conſpirat, nec reliquæ plusquam 0,0019 particulis diſſentiunt, quæ in altitudine barometri tres quintas unius lineæ partes valent. Nemo autem qui expertus fuerit, quam vagæ & parum inter ſe conſentientes fuerint obſervationes barometricæ, tantillam differentiam admodum curabit. Ipſe interim hanc rem non aliter quam hypotheſin precariam conſidero, neque aliam ob cauſam calculum §. §. 26. & 27. præmiſi, quam ut rationem darem, quâ fieri poſſit ut altitudines verticales non reſpondeant logarithmis altitudinum barometricarum, prouti deberet fieri, ſi per totam atmoſphæram uniformis eſſet calor: inſtituto enim calculo factaque comparatione ejus cum experimentis mihi videre viſus ſum, non poſſe rem hanc à diverſa particularum aërearum gravitatione in diverſis à centro terræ diſtantiis ſufficienter explicari, prouti Newtonus tentavit ſtatuendo gravitationes harum particularum decreſcere in ratione quadrata diſtantiarum à centro terræ, quæ hypotheſis in altitudinibus 13000 pedes *Pariſ.* non excurrentibus ſenſibilem differentiam non efficit ab hypotheſi uniformis gravitationis. Similiter ego aliquando incidi in opinionem auctam vim centrifugam particularum aërearum in majoribus altitudinibus aliquid hic contribuere poſſe; at pariter inſtituto calculo opinioni huic non amplius adhæſi. Interim non puto, abſurdum eſſe, ſi dicamus calorem aëris medium eo majorem eſſe, quo magis à ſuperficie maris diſtet. Velim autem ut probe notetur, hic ſermonem eſſe de calore *medio* in libera atmoſphæra: ſic enim fieri poteſt, ut calor realis quidem in montibus non creſcat ex cauſis aliis, nec tamen inde hypotheſis evertatur, quandoquidem §. §. 15. & 16. jam demonſtratum fuerit, pondus columnæ mercurii in barometro non præciſe cenſendum eſſe æquale ponderi columnæ aëreæ in illa regione ſumtæ, ſed ponderi medio omnium columnarum terræ inſiſtentium: De diverſis denſitatibus itaque ſic ſentio.

§. 29. Si æqualis eſſet ubique calor, forent utique denſitates elaſticitatibus ad ſenſus proportionales, reſponderentque altitudines verticales logarithmis altitudinum barometricarum: At vero id experimentis repugnare pono: neque tamen crediderim in duobus locis parum à ſe invicem diſſitis notabilem intercedere poſſe caloris differentiam, quia calor in corpore rariore ut eſt aër, mox uniformiter diſtribuitur, niſi perpetua adſit cauſa, quæ aërem vicinum calefaciat.

Alia autem res eſt in locis remotioribus, nec enim abſurdum puto aërem vel decies denſiorem ſtatuere ſub polis, quam ſub æquatore, ſi modo aër utrobique accipiatur ſuperficiei terræ proximus; at in magnis altitudinibus minor utique erit differentia inter denſitatem aëris qui polis & ejus qui æquatori reſpondet cæteris paribus, & propterea inæqualiter admodum decreſcent à ſuperficie terræ denſitates aëris & multo magis decreſcent ſub polis quam ſub æquatore: hoc igitur modo fieri poſſet, ut ſub polis denſitates aëris reales in parvis altitudinibus v. gr. decreſcant in ratione ut $(22000+x)^4$ ad 22000^4 ob auctum calorem, & ſub æquatore vix ſenſibiliter decreſcant, ob diminutum calorem, quæ caloris diminutio prope æquatorem con-

confirmatur ex eo quod culmen montis Pici per decem fere mensium spatium sit nive obtectum, dum in ipsa Teneriffæ insula nunquam ut ferunt ningit. Igitur non absurde densitates mediæ censeri possunt diminui in ratione ut $(22000+x)^2$ ad 22000^2, ut §. 27. assumtum fuit; dum elasticitates ubique decrescant in ratione ut $22000+x$ ad 22000; neque enim hæ in iisdem à superficie terræ altitudinibus differre possunt, nisi à causis fortuito supervenientibus & parum durantibus.

§. 30. In terris, quæ intra quadragesimum & sexagesimum latitudinis gradum continentur, probabile est densitates in eadem proxime ratione decrescere qua elasticitates; hancque ob rationem volui periculum facere, quænam inde refractionum theoria oriatur, qua de re nunc quædam adjiciam.

Digressio de refractione radiorum per atmosphæram transeuntium.

(α) Proprietas est notissima radiorum ex uno medio in aliud incidentium eaque innumeris experimentis confirmata, quod angulus incidentiæ ad angulum refractionis constantem servat rationem: præterea etiam patet, si refractio fiat infinite parva, id est, si differentia utriusque sinus rationem habeat infinite parvam ad alterutrum sinum, fore ut sinus anguli, qui intercipitur inter radium incidentiæ prolongatum & radium refractum, eandem habeat rationem ad sinum totum, quam habet differentia sinuum angulorum incidentiæ & refractionis ad cosinum anguli incidentiæ. Illum vero, quem modo allegavi, angulum interceptum inter radium incidentiæ prolongatum & radium refractum, deinceps vocabo *angulum refractionis differentialem*. Exinde sequitur, quod sit cæteris paribus sinus *anguli refractionis differentialis* proportionalis sinui anguli incidentiæ diviso per cosinum ejusdem anguli.

(β) Experimenta porro docent, si radius ex aëre in aërem diversæ ab altero densitatis incidat, esse *angulum refractionis differentialem* cæteris paribus differentiæ densitatum proportionalem.

Experimenta autem hanc in rem, quantum fieri potest, sumta fuerunt à D. Hauksbée, accuratissime, tum de aëre admodum condensato, tum etiam de aëre rariſſimo, qui tandem pro nullo haberi poterat: modus quo inſtituta fuerunt deſcribitur in *transactionibus Anglicanis*: Succeſſus autem omnium experimentorum huc redit, ut arguant fuiſſe ſinum *anguli refractionis differentialis* ad ſinum totum ut $5\frac{1}{2}$ pollices ad 2588. pedes, cum radius incideret ex aëre naturali in ſpatium ab aëre vacuum ſub angulo triginta duorum graduum, id eſt, ut 1 ad 6060 & iisdem poſitis, mutato angulo triginta duorum graduum in ſemirectum, ut 1 ad 3787 (per §. α). Inde deducitur, ſi radius ex *aëre naturali* in vacuum ſub angulo quocunque incidat, eſſe ſinum anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis ut 3787 ad 3786.

Neutonus loco hujus rationis aſſumit in *tract.* ſuo *optico* illam, quæ eſt inter 3201 & 3200, eamque deducit ex refractionum quantitate ab Aſtronomis obſervata: ſtatuit autem quantitatem refractionis eandem eſſe, ſi ſtrata radium refringentia ſint parallela, in quacunque cæterum ratione denſitates medii decreſcant, ſi modo in primo & ultimo ſtrato denſitatum differentia eadem maneat (vid. *Neut. tract. opt. pag.* 321. *edit. gall.*). De reliquo ſub diverſis circumſtantiis non poteſt non admodum eſſe variabilis refractio, quod aër, quem vocamus naturalem, multis mutationibus ſit obnoxius, tum à calore & frigore, tum à preſſione atmoſphæræ, quæ ambo concurrunt ad denſitatem aëris formandam, cui denſitati refractiones radiorum in vacuum incidentium ſunt proportionales cæteris paribus. Eadem etiam monuit D. Hauksbée in recenſione experimentorum, quæ modo allegavimus, eamque ob rationem ſtatum aëris, qui erat, cum experimenta ſumeret, probe definivit.

Fig. 60. (γ) Fuerit nunc AC (Fig. 60.) arcus circuli terreſtris centro B ductus, in cujus plano radius luminis AG eſt: erit autem iſte radius incurvatus AG ejus indolis, ut convergat ad aſymptoton, huicque aſymptotæ parallela putetur AH; ducatur horizontalis AE, rectaque AF quæ tangat in A curvam AG. Ita videmus fore angulum HAE menſuram altitudinis aſtri veræ, & angulum FAE menſuram altitudinis apparentis, angulumque FAH fore angulum refractionis: eſt autem angulus FAH idem quod ſumma omnium *angulorum refractionis differentialium*, ſeu augulorum contactus qualis eſt angulus cbo.

Conſiderentur duo elementa curvæ ab, bo, & per puncta a, b, o, ducti inteligantur centro communi B arcus $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$: ſitque denſitas aëris

aëris $\alpha\alpha\beta\beta = D$; densitas aëris $\beta\beta\gamma\gamma = D - dD$, erit (per §. §. α, β) sinus anguli contactus in b divisus per sinum totum, seu ipse angulus contactus proportionalis differentiæ densitatum dD multiplicatæ per rationem sinuum angulorum incidentiæ & refractionis, id est, multiplicatæ per $\frac{be}{ce}$. Si vero ducatur BD perpendicularis ad FA productam, perspicuum est, vix differre $\frac{be}{ce}$ & $\frac{BD}{De}$, ideo quod radius fere sit rectus sicque possit triangulum BDe pro rectilineo haberi & simili cum triangulo bce. Igitur erit angulus quæsitus FAH proportionalis $\int \frac{BD}{De} \times dD$.

(δ) Hisce vestigiis insistendo ponendoque esse ubique densitatem $D = \frac{22000}{22000 + x} G$, ubi x exprimit lineam na numero pedum Parisinorum & G denotat densitatem aëris in loco observationis, inveni quod sequitur. Sit sinus altitudinis astri apparentis $= f$, cosinus $= F$, radius terræ $= r$ numero pedum Parisinorum exprimendus: indicetur numerus 22000 per a: ponatur porro sinus totus $= 1$, *angulus refractionis differentialis* pro radio ex aëre naturali in vacuum sub angulo semirecto incidentis $= g$: Denique brevitatis ergo fiat $2r - 2a = \alpha$; $-FFrr + 2ar - aa = \beta$: & erit β aut numerus affirmativus aut negativus; affirmativus erit, si altitudo apparens sideris parva fuerit & quidem infra 2°, 44′: secus erit negativus: In priori casu obtinebitur angulus quæsitus FAH hunc in modum: Fiat nempe semicirculus MLF (Fig. 61.) cujus radius $AM = 1$: sumatur $AC = \frac{\alpha}{2fr}$; Fig. 61.
$AB = \frac{2\beta - \alpha a}{2afr}$, ducanturque CD, BT ad MC perpendiculares & erit angulus $FAH = \frac{-fFrr}{2\beta} g + \frac{far}{\beta} g + \frac{far\alpha \times DT}{2\beta\sqrt{\beta}} g$.

In casu, quo β est negativus, erit idem angulus
$$FAH = \frac{-far}{\beta} g + \frac{fFrr}{\beta} g + \frac{far\alpha}{2\beta\sqrt{\beta}} g \times \log. \frac{(\alpha - 2\sqrt{\beta}) \times (Fr - a + \sqrt{\beta})}{(\alpha + 2\sqrt{\beta}) \times (Fr - a - \sqrt{\beta})}.$$

(ϵ) Secundum istas hypotheses ponendo pro radio terræ 19600000, poterit pro omni altitudine sideris apparentis ejus determinari refractio astronomica, si bene experimento inventus fuerit valor anguli g: quia vero difficile admodum est hunc valorem cum sufficiente accuratione definire, consultius erit

erit in casu aliquo particulari astronomice refractionem definire, & ex hoc reliquos calculo subducere. Assumamus v. gr. in altitudine decem graduum refractionem esse 5 *min.* 28 *sec.* cui hypothesi plerique Astronomi Parisiis adhærent. Inveniemus hancce refractionis tabulam.

altit. sid. appar.	refract.	altit. sid. appar.	refract.
0 *grad.*	34 *min.* 53 *sec.*	50 *grad.*	0 *min.* 53 *sec.*
5	9 - - - - 59 - -	55	- - - - - 44½
10	5 - - - - 28 - -	60	- - - - - 36½
15	3 - - - - 44 - -	65	- - - - - 29½
20	2 - - - - 52 - -	70	- - - - - 23
25	2 - - - - 12 - -	75	- - - - - 17
30	1 - - - - 47 - -	80	- - - - - 11½
35	1 - - - - 29 - -	85	- - - - - 5½
40	1 - - - - 15 - -	90	- - - - - - 0.
45	1 - - - - - 3 - -		

Quia vero refractiones sequuntur rationem litteræ g, id est, *anguli refractionis differentialis* radii sub angulo semirecto ex aëre naturali in vacuum incidentis & quia iste angulus proportionalis est densitati aëris naturalis, seu aëris, quem observator respirat, patet si vel aër constanter similiter vaporibus esset oneratus (à quibus animum adhuc abstraximus) non posse tamen fieri, quin refractiones astronomicæ sint admodum variabiles. Majores nempe erunt in superficie maris quam in montibus, eritque notabilis differentia vel in mediocribus montium altitudinibus: majores præterea erunt tempore frigido quam calido, hæcque sola causa in hisce terris refractiones minimum quarta parte augere potest: denique majores etiam erunt refractiones barometro alto quam humili. Poterunt autem si vapores nullo sint obstaculo, refractiones omni tempore recte definiri, si instrumentum, quod §. 9. descriptum fuit quodque Fig. 57. repræsentat simul adhibeatur cum barometro; si enim altitudinem mercurii in barometro dividas per altitudinem mercurii in altero instrumento, habebis densitatem aëris, cui cæteris paribus refractio proportionalis est facienda. Neque dubito, quin refractio solis minor sit refractionibus reliquorum siderum, quod calor solis aërem non mediocriter expandit aërisque densitatem diminuit.

§. 31.

§. 31. Ex iis quæ de agitatione particularum aërearum, à quâ utique calor aëris pendet, præsertim vero, quæ §. 10. monita fuerunt, apparet gradum eundem caloris aëri inesse, quoties eadem ratio intercedit inter ejus elasticitatem atque densitatem; elasticitatem indicat barometrum; densitatem concludimus ex gravitate aëris specifica; atque inde ut vidimus §. 10, gradus obtineri poterit caloris fixus, si aquæ bullientis calor incertus videatur, prouti D°. Fahrenheid observatus fuit pendere à pondere atmosphæræ incumbentis. Instrumenta quæ singulis momentis densitatem aëris indicant facile excogitari possunt atque à multis descripta fuerunt.

Notandum hic est rationem illam modo dictam inter aëris elasticitatem ejusque densitatem simul exhibere altitudinem aëris homogenei, & quia nobis deinceps sermo erit de ista altitudine, convenit illam recte prius definire, quam ad alia pergamus.

§. 32. Si fingamus columnam aëream verticalem uniformis densitatis & cum mercurio barometri ad æquilibrium compositam, erit altitudo illius columnæ *altitudo* quam voco *aëris homogenei* pro data densitate.

Et quia aëris mediocriter densi gravitas specifica est ad gravitatem specificam mercurii ut 1 ad 11000 ipsaque altitudo media mercurii in barometro pro locis parum à superficie maris elevatis sit $2\frac{1}{3}$ ped. *Paris.* erit altitudo aëris homogenei mediocriter densi *25666* pedum.

Patet ex ista definitione altitudines illas, de quibus nunc dicimus, eo minores esse, quo densior est aër, cui altitudo respondere debet, & quo minor est altitudo mercurii in barometro. Igitur si idem sit caloris gradus in montibus & in superficie maris, eadem quoque erit utrobique altitudo aëris homogenei, quia pro eodem caloris gradu aëris densitas rationem sequitur aëris elasticitatis seu altitudinis mercurii in barometro. Apparet porro altitudinem aëris homogenei in superficie maris admodum decrescere ab æquatore versus polos, quia frigus intenditur densitasque aëris augetur manente elasticitate & in iisdem regionibus minorem esse tempore hyemali quam æstivo.

§. 33. Multa sunt quæ ad motum aëris definiendum pertinent, quorum solutio pendet ab altitudine aëris homogenei: Inter hæc etiam est propagatio soni ejusque celeritas: Quamvis enim celeritas soni diversimode definiatur

niatur à diverſis, quos concipere poſſumus de ejus propagatione modis ita, ut nunc videatur celeritatem eam eſſe quæ debeatur altitudini aëris homogenei, nunc quæ dimidiæ altitudini reſpondeat, aut etiam dimidiæ altitudini multiplicatæ per rationem quadrati circulo circumſcripti ad aream circuli, omnes tamen opiniones in eo conveniunt, quod celeritas ſoni proportionalis ſit radici altitudinis aëris homogenei cum eo, in quo propagatur. Si ita ſe res habeat, celerius propagatur ſonus in aëre calido quam frigido, barometro alto quam humili, (nihil dicam de ventis ſecundis aut contrariis); multa in hanc rem partim in Italia partim in Anglia ſumta fuerunt experimenta, hæcque poſteriora docuerunt celeritatem ſoni mediam reſpondere 1140 ped. *Angl.* intra minutum ſecundum perficiendis. At quia in uno eodemque loco variabilis eſt altitudo atmoſphæræ homogeneæ nominatimque hic locorum excurrit à mutationibus barometricis junctis cum mutationibus caloris à 3 uſque ad 4, variabilis erit ubique celeritas ſoni, ſi vel nihil mutent venti, eaque celeritas in hiſce terris continebitur intra terminos $\sqrt{3}$ & $\sqrt{4}$, ſeu 173 & 200.

§. 34. Venio jam ad varias quæ fingi poſſunt de motu aëris quæſtiones ſolvendas ſimiles illis, quas de motu fluidorum non elaſticorum in præcedentibus habuimus.

Problema.

Sit motus definiendus aëris ex vaſe per foramen exiguum erumpentis in ſpatium infinitum ab aëre vacuum.

Solutio.

Apparet ex natura quæſtionis inſenſibilem eſſe motum localem aëris interni quo ſeſe expandit, dum certa ſui quantitas per foramen erumpit: Igitur hic ſolus *aſcenſus potentialis*, quem particula aërea, dum expellitur, acquirit conſiderandus eſt, atque comparandus cum *deſcenſu actuali* vel potius cum diminutione elaſticitatis, quam aër internus habet. Ut vero totam rem ad methodum noſtram pro fluidis non elaſticis adhibitam reducamus, conſiderabimus cylindrum verticalem communis cum vaſe propoſito amplitudinis atque tantæ altitudinis, quanta eſt altitudo aëris homogenei cum aëre interno, is vero cylindrus, ſi ſimili aëre plenus cenſeatur, ſed non elaſtico, eadem veloci-

tate

tate suo pondere aërem infimum expellet per foramen, qua aër in vase proposito sua elasticitate se ipsum expellit. In priori autem casu ejicitur velocitate quæ debetur ipsi altitudini cylindri, ergo & in posteriori. Notandum autem est, altitudinem quam pro cylindro finximus, perpetuo eandem esse, quia aëris elasticitas & densitas in eadem ratione diminuuntur, calorem autem non mutari ponimus. Igitur si altitudo aëris homogenei (quæ à calore aëris interni pendet) dicatur A, effluet aër constanter velocitate $\surd A$. Nec tamen, quod calculus ostendit, vas ipsum unquam evacuatur, quia aër effluens fit continue rarior, quod ut æquatione comprehendamus, ponemus densitatem seu quantitatem aëris à fluxus initio $= 1$; densitatem seu quantitatem aëris post definitum tempus residui $= x$, tempusque ipsum $= t$, erit, quia velocitas constans est, $-dx = axdt$, ubi per a intelligitur quantitas constans definienda ex magnitudine vasis, amplitudine foraminis & altitudine A: hinc $\frac{-dx}{x} = adt$ & $\log. \frac{1}{x} = at$. reperitur autem valor coëfficientis a hoc modo. Quia positum à nobis fuit $-dx = ax\,dt$; erit ab initio effluxus $-dx = adt$. Jam mutetur elementum primum $(-dx)$ in cylindrum foramini ceu basi superinstructum; erit autem altitudo istius cylindruli $= -L\,dx$, si L sit altitudo cylindri super eodem foramine extructi & communem cum vase proposito capacitatem habentis: hæc porro longitudo $-L\,dx$ illa est, quæ tempusculo dt percurritur, & quia poni solet tempusculum æquale spatio percurso diviso per velocitatem, erit hic $dt = \frac{-Ldx}{\surd A}$; substituatur iste valor in æquatione $-dx = adt$ & habebitur $-dx = \frac{-aLdx}{\surd A}$, sive $a = \frac{\surd A}{L}$. Est proinde æquatio finalis hæc:

$$\log. \frac{1}{x} = \frac{t\surd A}{L}.$$

Si tempus exprimere lubeat per certum minutorum secundorum numerum, quem vocabimus n, & intelligatur per s spatium quod mobile absolvit cadendo libere à quiete intra unum minutum secundum, erit ponendum $t = 2n\surd s$, sicque fiet

$$\log. \frac{1}{x} = \frac{2n\surd As}{L}.$$

Problema.

§. 35. Quæritur motus aëris denſioris in aërem externum rariorem infinitum ex vaſe per foramen valde parvum erumpentis, poſito in utroque aëre eodem caloris gradu.

Solutio.

Sit denſitas aëris interni initialis $= D$; denſitas aëris externi $= \delta$: denſitas aëris interni poſt datum tempus t reſidui $= x$, altitudo aëris homogenei, (ſive ratione aëris interni ſive externi, nec enim diverſa eſſe poteſt, ſi uterque aër eodem calore præditus ſit, ſicque denſitates & elaſticitates in pari ratione decreſcant) $= A$. Quæratur ubique altitudo aëris homogenei, qui habeat eandem preſſionem ſeu elaterem cum aëre externo & cujus denſitas eadem ſit cum aëre interno: hæc altitudo ab initio erit $\frac{\delta A}{D}$, & poſt tempus t erit $\frac{\delta A}{x}$. Patet autem velocitatem aëris erumpentis talem ubique fore, quæ reſpondeat differentiæ definitarum altitudinum A & $\frac{\delta A}{x}$; eſt itaque poſt tempus t velocitas aëris erumpentis $= \sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}$.

Sunt porro decrementa denſitatum $(-dx)$ proportionalia quantitatibus aëris erumpentis, quæ rationem habent compoſitam ex velocitate $\left(\sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}\right)$ ex denſitate (x) & ex tempuſculo (dt): ſic igitur eſt $-dx$ $= a\left(\sqrt{\left(A - \frac{\delta A}{x}\right)}\right) x\,dt$, ubi a eſt numerus conſtans qui per methodum præcedentis paragraphi fit $= \frac{1}{L}$, retenta ſignificatione hujus litteræ ibidem adhibita; hocque valore ſubſtituto oritur

$$-dx = \frac{dt}{L} \times \sqrt{(Axx - \delta A x)} \text{ ſeu } \frac{-dx}{\sqrt{(xx - \delta x)}} = \frac{dt\sqrt{A}}{L};$$

Factaque debita integratione fit:

$$\log. \frac{[\sqrt{x} - \sqrt{(x-\delta)}] \times [\sqrt{D} + \sqrt{(D-\delta)}]}{[\sqrt{x} + \sqrt{(x-\delta)}] \times [\sqrt{D} - \sqrt{(D-\delta)}]} = \frac{t\sqrt{A}}{L},$$ aut poſito rurſus, ut in præcedente paragragho, $t = 2n\sqrt{s}$, erit

log.

$$log. \frac{[\sqrt{x}-\sqrt{(x-\delta)}]\times[\sqrt{D}+\sqrt{(D-\delta)}]}{[\sqrt{x}+\sqrt{(x-\delta)}]\times[\sqrt{D}-\sqrt{(D-\delta)}]}=\frac{2n\sqrt{As}}{L}$$

Corollarium 1.

§. 36. Omnis effluxus fit tempore finito quâ in re ista quæstio ab altera præcedente differt: Cessat autem aër effluere, cum est $x=\delta$, & tunc fit $n=\frac{L}{2\sqrt{As}}\times log. \frac{\sqrt{D}+\sqrt{(D-\delta)}}{\sqrt{D}-\sqrt{(D-\delta)}}$.

Sit v. gr. A $=26000$ *ped. Paris.* contineat vas propositum unum pedem cubicum, foramen autem habeat amplitudinem unius lineæ quadratæ, erit L $=20736$; ponatur insuper aërem internum ab initio duplo fuisse densiorem externo; est autem ut constat $s=15\frac{1}{12}$ *ped. Paris.* Fiet igitur

$$n=\frac{20736\sqrt{3}}{\sqrt{(181.26000)}}\ log. \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=29,2,$$

quod significat aërem utrumque ad æquilibrium compositum iri tempore paullo majori quam viginti novem minutorum secundorum, post idque omnem effluxum cessaturum. Fieri autem potest à contractione, quam fluida præ foramine patiuntur (*vid. sect. IV.*) & ad quam nullam fecimus in computo attentionem, ut tempus istud augeatur fere in in ratione ut 1 ad $\sqrt{2}$.

Corollarium 2.

§. 37. Si fingatur aërem non immediate per foramen effluere, sed per longum tubum, non mutabitur propterea velocitas, si modo totius tubi capacitas sit veluti infinite parva ratione capacitatis, quæ in vase ipso est; Videtur autem densitatem aëris, quamdiu in tubo est, eandem esse cum densitate aëris vasi inclusi, nec tamen, quod demonstrabo inferius, elasticitas aëris in tubo major est elasticitate aëris externi, qui tubum circumdat. Consequens inde est, ventum aërem esse densiorem aëre quiescente, sed non magis elasticum: attamen densitatum differentia parvula quoque erit; ventus enim, qui vel 30. pedes singulis minutis secundis conficit, aërem vicinum, æque calidum & quietum, vix una millesima septingentissima parte densitate superabit.

Problema.

§. 38. Definire influxum aëris per foramen valde parvum in vas aëre rariore plenum, posito rursus utrobique eodem caloris gradu.

Solutio.

Fuerit vas ab initio omnino vacuum, & poſt tempus t ponatur denſitas aëris interni $= x$; ſic reperietur iiſdem fere veſtigiis inſiſtendo, quibus in trigeſimo quinto paragrapho uſi ſumus retentisque iisdem denominationibus

$$\frac{dx}{\sqrt{(\delta - x)}} = \frac{dt\sqrt{AD}}{L} \text{ ſive } t = 2n\sqrt{s} = \frac{2L}{\sqrt{A}} - \frac{2L\sqrt{(D-x)}}{s\sqrt{AD}}.$$

Numerus igitur minutorum ſecundorum, quo totum vas impletur, donec inter utrumque aërem æquilibrium ſit exprimitur per $\frac{L}{\sqrt{As}}$: & eſt tempus repletionis duplum illius quo repleretur ſi velocitate initiali conſtanter influeret aër. In caſu quo capacitas vaſis pedem cubicum continet & foramen lineam quadratam æquat, ſit repletio tempore propemodum triginta trium minutorum ſecundorum, niſi contractione venæ aëreæ influentis repletio retardetur.

§. 39. Expoſuimus varias fluidorum elaſticorum ſive motorum ſive quieſcentium proprietates: Unum ſupereſt non omittendum, quo fluida elaſtica differunt à non-elaſticis, hoc ſcilicet, quod fluido elaſtico vel quieſcenti *vis viva* inſita ſit, non quod inſtar aliorum corporum motorum ſe ad certam altitudinem elevare poſſit, neque enim motum localem in illo hic conſideramus, ſed quod elatere ſuo talem aſcenſum in aliis corporibus gravibus generare poſſit. Licebit autem, quod ſpero, in ſequentibus uti vocabulo *vis vivæ corpori elaſtico compreſſo inſitæ*, quando nihil aliud eo intelligitur quam *aſcenſus potentialis*, quem corpus elaſticum aliis corporibus communicare poteſt priuſquam totam ſuam vim elaſticam perdiderit.

Meretur hic in anteceſſum notari, quod ſicut deſcenſus corporis dati per datam altitudinem, utcunque fiat, eandem conſtanter vim vivam in corpore producit, ita quoque elaſtrum ſive fluidum elaſticum poſtquam à dato tenſionis ſeu condenſationis gradu ad datum alium gradum fuit reductum utcunque, id ſemper eandem vim vivam in ſe recipiat rurſuſque contraria mutatione alii corpori communicare poſſit.

De hujuſmodi viribus vivis fluido elaſtico compreſſo inſitis earundemque menſuris paucis nunc agam: dignum attentione argumentum eſt, quod eo reducantur menſuræ virium prò machinis aëre, aut igne aut aliis hujuſmodi di viribus motricibus, quarum fortaſſe plures novæ non ſine inſigni mechanicæ practicæ incremento & perfectione excogitari poterunt, movendis.

§. 40. Ut incipiamus ab aëre in vacuo, conſiderabimus cylindrum verticaliter poſitum ABCD (Fig. 62.) cum ſuſtentaculo EF, quod omni pondere deſtitutum liberrime ſurſum deorſumque moveri poſſit. Sit ſpatio EBCF aër incluſus, totus autem cylindrus in vacuo poſitus fingatur: Sit preſſio aëris EBCF tanta qua ſuſtinere poſſit pondus p, quod æquale erit preſſioni columnæ atmoſphæræ, ſi aër iſte ſit naturalis. Superveniat jam aliud pondus P: ita fiet ut operculum deſcendat in GH motibuſque reciprocis ad puncta H & F agitetur. Ut motum definiamus, utemur hypotheſi ordinaria, quod preſſiones aëris cæteris paribus ſint denſitatibus proportionales. Fig. 62.

Fuerit itaque $FC = a$, $FH = x$; velocitas ſuſtentaculi in ſitu $GH = v$, erit preſſio, qua ſuſtentaculum GH ad ulteriorem deſcenſum urgetur $= P + p - \frac{a}{a-x} p$, huicque preſſioni æqualis cenſenda eſt vis, quæ pondus ſuſtentaculo incumbens animat; igitur ſi hanc vim dividas per maſſam habebis vim accelerantem, quæ multiplicata per tempuſculum ſeu per $\frac{dx}{v}$, dabit incrementum velocitatis dv, eſt itaque

$$dv = (P + p - \frac{ap}{a-x}) \times \frac{dx}{v} : (P + p), \text{ vel}$$

$$\tfrac{1}{2} (P + p) vv = (P + p) x - ap \log. \frac{a}{a-x}.$$

Sed ex deſcenſu ponderis $(P + p)$ per altitudinem x generatur *vis viva potentialis* $(P + p) x$, & cum ſuſtentaculum eſt in ſitu GH, ineſt corpori $(P + p)$ *vis viva actualis* $\frac{1}{2} (P + p) vv$, id eſt, $(P + p) x - ap \log. \frac{a}{a-x}$, quæ à priori deficit quantitate $ap \log. \frac{a}{a-x}$, hæcque in compreſſionem aëris tranſiit.

Dico itaque *non poſſe aërem occupantem ſpatium* a *condenſari in ſpatium* a — x, *quin vis viva impendatur, quæ generatur ex deſcenſu ponderis* p *per altitudinem* a *log.* $\frac{a}{a-x}$ *quocunque modo illa compreſſio facta fuerit; poteſt autem modis fieri infinitis.* Iſtam vero regulam uno nunc alterove exemplo illuſtrabo.

 Sit

Sit basis cylindri unius pedis quadrati, altitudo initialis FC duorum pedum: contineaturque in spatio BF aër qualis in superficie terræ medius esse solet, qui ferre possit superficie EF 2240 libras: ponatur $x = 1$, ut sic habeatur *vis viva*, qua duo pedes cubici aëris naturalis in spatium unius pedis cubici coërceri possunt in vacuo: eritque ista *vis viva* $= 2 \times 2240 \times$ *log.* $2 = 3105$, id est, talis quæ generatur lapsu libero corporis 3105 librarum per altitudinem unius pedis. Ergo & vicissim, si habeatur pes cubicus aëris naturali duplo densioris, poterit illius ope pondus elevari 3105 librarum ad altitudinem unius pedis in vacuo, dum aëris naturalis densitatem assumit.

Sit porro sub iisdem reliquis circumstantiis idem aër in spatium duplum, quam antea fuit, expansum, occupans nunc in cylindro altitudinem quatuor pedum, isque rursus condensetur in spatium unius pedis cubici, requiretur ad hanc compressionem *vis viva*, quæ exprimitur per 4×1120 *log.* 4, quæ priore duplo major est. Igitur in vacuo si habeatur pes cubicus aëris naturali duplo densioris, poterit illius ope pondus elevari 6210 librarum ad altitud. unius pedis, dum aëris naturalis dimidiam densitatem assumit, aut pondus 9315 lib. dum aëre naturali fit quadruplo rarior.

Consequens inde est, si aër in spatium expandere se possit infinitum & ubique elasticitatem servet densitati proportionalem, quantitati aëris finitæ vim vivam inesse infinitam.

§. 41. Hæc autem pertinent ad æstimationem vis vivæ, quæ aëri in vacuo posito insita sit: paullo alius fit computus pro aëre densiore, qui in atmosphæra positus est: hic enim maximus expansionis gradus non ultra æquilibrium cum aëre atmosphæræ extendi potest: facile hinc est in antecessum prævidere, si v. gr. habeatur pes cubicus aëris naturali duplo densioris, vim vivam quæ in atmosphæra ab hoc aëre compresso elici possit, minime esse infinitam. Poterunt autem hujusmodi vires vivæ hunc in modum determinari.

§. 42. Sit aër EBCF naturalis & in æquilibrio cum aëre externo; intelligatur autem per p pressio atmosphæræ, in sustentaculum EF, quæ quidem cum pressione aëris interni nondum condensati in æquilibrio est. Imponatur eidem sustentaculo pondus P; fuerit jam aër condensatus in spatium GBCH; habeatque sustentaculum pondere P oneratum in situ GH velocitatem v, erit retentis reliquis denominationibus

$dv =$

$$dv = \left(P + p - \frac{ap}{a-x}\right) \times \frac{dx}{v} : P, \text{ vel}$$

$$P\,v\,dv = \left(P - \frac{xp}{a-x}\right) dx, \text{ quæ integrata dat}$$

$$\tfrac{1}{2} P\,vv = Px + px - ap \log. \frac{a}{a-x}.$$

Jam vero deſcenſu ponderis P per altitudinem x genita fuit *vis viva* Px, de qua eidem ponderi ceu velocitate v moto ineſt pars $\frac{1}{2} P\,vv$ ſeu $Px + px - ap \log. \frac{a}{a-x}$; pars igitur vis vivæ quæ ad aërem tranſiit, eſt $= -px + ap \log. \frac{a}{a-x}$, quæ minor eſt altera §. 40. definita.

Habeatur v. gr. pes cubicus aëris naturali duplo denſioris, invenietur vis viva, quam iſte aër amittit, dum aëris naturalis circumfuſi denſitatem aſſumit, ea quæ lapſu libero corporis 865. lib. per altitudinem unius pedis generatur.

Pari ſenſu pes cubicus aëris naturali triplo denſioris vim vivam habere intelligitur talem quæ reſpondeat lapſui libero corporis 2898 lib. per altitud. unius pedis, qui numerus nempe prodit cum ponitur $p = 2240$, ut §. 40; $a = 3$. & $x = 2$.

§. 43. Perſpicuum eſt ex hoc conſenſu inter conſervationem virium vivarum aëri compreſſo & corpori à data altitudine delapſo inſitarum, nullam eſſe ad uſum machinarum perficiendum prærogativam ſperandam ex principio aëris comprimendi, & ubique valere regulas in præcedente ſectione exhibitas. Quia vero multis modis fit, ut aër non vi ſed natura ſit compreſſus aut elaterem naturali majorem acquirat, ſpes certe eſt, poſſe hujuſmodi rebus naturalibus magna ad machinas movendas compendia excogitari, prouti D. Amontons jamjam docuit modum movendarum machinarum vi ignis. Mihi perſuadeo ſi omnis vis viva, quæ in carbonum pede cubico latet, ex eodemque combuſtione elicitur, utiliter ad machinam movendam impendatur, quod plus inde profici poſſit, quam labore diurno octo aut decem hominum. Etenim carbones dum comburuntur aëris elaſticitatem nonſolum inſigniter augent, ſed & ingentem aëris novi quantitatem generant.

Ita Haleſius in *veget. ſtatiks* deprehendit ex ſemipollice carbonis 180. polli-

pollices aëris ejusdem cum aëre naturali elasticitatis fuisse generatos; ergo pes cubicus carbonum aërem dabit ad 360. ped. cub. Sed si §. 41. quæratur vis viva quæ generari possit à pede cubico aëris naturali 360. vicibus densioris, invenietur illam convenire cum pondere 3938000. librarum ab altitudine unius pedis delapso: atque si præterea aëris illius elasticitas à calore carbonum incensorum quadruplo fieri major ponatur, conveniet ista vis viva cum pondere 15752000. lib. ab eadem altitudine delapso. Difficile autem est machinam ad hunc finem aptam excogitare. Multæ præterea aliæ sunt res naturales, quæ nonsolum aërem fovent compressum, sed & aërem circumfusum calefaciendo eundem magis elasticum reddere valent: tales sunt calx viva cum aqua dulci mista, omniaque fermentantia, aquæ in vapores vi ignis redactæ incredibilis vis inest; machina ad hoc est Londini ingeniosissima quæ hoc principio motus aquas toti urbi erogat eamque descripsit Cl. Weidlerus. Præsertim vero considerari meretur stupendus, qui à pulvere pyrio expectari possit effectus: Calculo enim quorundam sumtorum experimentorum subducto, quem infra adjiciam, edoctus fui elasticitatem pulveris pyrii accensi plus decies millies superare elasticitatem aëris naturalis, imo omnibus bene perpensis probabile fit, elasticitatem ejus esse incredibiliter majorem: ponamus autem auræ pulveris pyrii accensi expansæ elasticitatem decrescere in simili ratione cum densitate: hisce positis invenietur vis viva pedi cubico pulveris pyrii insita, si in §. 42. ponatur $a = 10000$; $x = 9999$, $p = 2240$ & sumatur $-px + ap\log. \frac{a}{a-x}$, quæ quantitas sic fit æqualis 183913864. Igitur machina datur in theoria, quæ ope unius pedis cubici pulveris pyrii possit elevare 183913864 libras ad altitudinem unius pedis, quem laborem vel centum homines robustissimi intra unius diei spatium perficere posse non crediderim, quâcunque machina utantur. Probabile autem est, ut dixi, effectum pulveris pyrii longe majorem esse; certe autem non minor est, calculus enim innititur altitudini, ad quam globus ferreus ex tormento bellico ejectus in vacuo ascendere possit, in quo experimentorum genere maxima pulveris pyrii pars perit.

Ista vero magis percipientur, si notetur eundem calculum (quem antea fecimus pro effectu, qui ex aëre condensato sese restituente oritur, demonstrando) procedere etiam pro aëre qui naturali circumfuso non quidem magis densus sed tamen ab aucto calore magis elasticus fit: ita v. gr. quoties pes cubicus aëris ordinarii augmento caloris duplum elaterem acquisivit,

po-

poteſt ejus ope pondus 865 librarum ad altitudinem unius pedis elevari, ſi modo machina adhibeatur perfectiſſima.

Ab auctis autem aëris tum denſitate tum calore pendent omnium rerum hic expoſitarum effectus.

§. 44. Interim non ſolum ab aëre condenſato calefactove vis viva pro machinis movendis impendenda obtineri poteſt, ſed & ab aëre rariore aut frigidiore. Ubicunque enim æquilibrium ſublatum eſt, *vis viva* adeſt, quæ impendi poteſt, ſi debita machina excogitetur, ad onera elevanda machinamentaque circumagenda. Methodus autem determinans *vim vivam*, quæ ab aëre datæ denſitatis datique caloris ſpatium datum occupante elici poteſt, mutatis mutandis eadem eſt cum illa quam §. 42. adhibuimus.

45. Fuerit nempe rurſus cylindrus verticalis ABCD (Fig. 63.) cum diaphragmate mobili EF: puta aërem EBCF, ut §. 42. naturalem & in æquilibrio cum aëre externo: preſſio autem aëris cujusvis in EF dicatur p: Finge dein pondus P, quod mediante fune trans duas trochleas M & N ducto cum diaphragmate cohæreat, idemque verſus AD trahat, perveneritque ſic diaphragma ex ſitu EF in GH: Denique ponatur rurſus FC $= a$, FH $= x$: velocitas diaphragmatis in ſitu GH ſeu ponderis in ſitu P $= v$; His poſitis ſi conferantur §. §. 40. & 42. patebit fore nunc Fig. 63.

$$dv = \left(P + \frac{ap}{a+x} - p\right) \times \frac{dx}{v} : P \text{ vel}$$

$$P v dv = \left(P - \frac{px}{a+x}\right) dx, \text{ quæ integrata dat}$$

$$\tfrac{1}{2} P vv = Px - px + ap \log. \frac{a+x}{a}.$$

At rurſus deſcenſus ponderis P per altitudinem x producta fuit *vis viva* Px, dum ipſi interim ponderi velocitate v moto ineſt tantum *vis viva* $\frac{1}{2} P vv$ ſeu $Px - px + ap \log. \frac{a+x}{a}$, Igitur *vis viva*, quæ reſidua eſt, nempe $px - ap \log. \frac{a+x}{a}$, ad aërem tranſiit rurſusque reſtitutione æquilibrii inter aërem internum & externum, illa *vis viva* ad alia corpora pro lubitu transfundi poterit: Igitur ſi habeas ſpatium GBCH aëre plenum cujus denſitas ſit ad denſitatem aëris externi ut CF ad CH, in poteſtate erit *vis viva* $px - ap \log. \frac{a+x}{a}$.

An vero iſta vis viva aëri inhæreat proprie externo an interno, logomachia eſt; ſufficit quod à ſublato æquilibrio inter utrumque aërem talis vis viva obtineri poteſt, dum reſtitutio permittitur.

Habeatur v. gr. pes cubicus aëris naturali duplo rarioris, cui hypotheſi quadrabunt poſitiones $p = 2240$ lib. $a = \frac{1}{2}$ ped. & $x = \frac{1}{2}$ ped. & erit vis viva, de qua ſermo eſt, $= 1120 - 1120\ log.\ 2 = 344$, id eſt, ea quæ generatur lapſu libero 344 lib. ab altitudine unius pedis.

Si pes cubicus ſit aëre repletus, qui naturali ſit quadruplo rarior, erit jam vis viva quæſita (poſito nempe $p = 2240$, & $a = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$) $= 1680 - 560.\ log.\ 4 = 904$, ſeu talis quæ oritur lapſu libero ponderis 904 lib. per altit. unius pedis.

Si denique habeatur pes cubicus ab aëre omnino vacuus, ponendum eſt $p = 2240$; $a = 0$, & $x = 1$: atque ſic erit vis viva quæſita $= 2240 \times (1 - 0\ log.\ \frac{1}{0})$ conſtat autem eſſe $0\ log.\ \frac{1}{0}$ infinite parvum præ unitate; eſt igitur numerus iſte $= 2240$, qui indicat poſſe hac vi viva 2240 libras ad altitudinem unius pedis elevari.

§. 46. Pertinet ad præſens argumentum ſtupenda vis aëris admodum condenſati, ſed præſertim auræ pulveris pyrii accenſi in uſu ſclopetorum pneumaticorum & tormentorum bellicorum. De his quæ ſeorſim commentatus ſum huic ſectioni adjiciam.

De vi aëris condenſati & auræ pulveris pyrii accenſi ad globos projiciendos in uſu ſclopetorum pneumaticorum & tormentorum bellicorum.

Fig. 64. (I) Sit AG (Fig. 64.) longitudo animæ in tormento ſclopetove horizontaliter poſito, voceturque $= a$: denotet AC longitudinem ſpatii, quod aër condenſatus ſeu aura pulveris pyrii accenſi occupat ab initio exploſionis, ſitque $AC = b$: pondus globi ejiciendi $E = 1$; ponimus autem, globum cavitatem animæ exacte replere & liberrime in illa moveri: denſitas aëris condenſati in ſpatio AD ſe habeat ad denſitatem aëris naturalis ut n ad 1: Denique

que ponatur pondus columnæ mercurii (cujus baſis eſt CD & cujus altitudo eadem ſit quæ in barometro) $= P$. Utemur autem hypotheſi, ſive globus propellatur ab aëre condenſato ſive à pulveris pyrii aura, potentiam illius fluidi propellentis proportionalem eſſe denſitati.

His ad calculum præparatis, globum conſiderabimus in ſitu c, ponendo $Ac = x$, velocitatemque globi in hoc ſitu $= v$, ſic erit potentia globum in ſitu c propellens $= \left(\frac{nb}{x} - 1\right) \times P$, quæ diviſa per maſſam 1 ductaque in elementum ſpatii dx dat incrementum dimidium quadrati velocitatis; unde fit $v\,dv = \left(\frac{nb}{x} - 1\right) \times P\,dx$, ſive $\frac{1}{2}vv = (b - x + nb\ log.\ \frac{x}{b})\,P$. Ponatur $x = a$, habetur altitudo debita velocitati, quacum globus exploditur; vocetur iſta altitudo α & erit

$$\alpha = \left(b - a + nb\ log.\ \frac{a}{b}\right) \times P.$$

(II) Sit v. gr. in ſclopeto pneumatico longitudo animæ ſeu $a = 3$ *ped. Paris.* longitudo $AC = 4$ *poll.* fueritque aër captus in AD naturali decies denſior ſeu $n = 10$, diameter animæ ſeu globuli ejiciendi trium linearum ejusque gravitas ſpecifica ratione mercurii ut 10 ad 17. Erit P præterpropter $=$ 286; indeque invenitur $\alpha = 2788$, indicio globum ejectum iri velocitate qua in vacuo ad altitudinem 2788 *ped.* aſcendere poſſit. Ex præcedente formula colligitur jactum globi vehementiſſimum fore pro eadem auræ elaſticæ quantitate, ſi longitudo animæ fiat $= nb$. Si vero animus ad impedimenta alia, quæ globus præter inertiam ſuam & reſiſtentiam aëris externi in tranſitu ſuo per Sclopeti animam patitur, advertatur, apparet longitudinem animæ ad jactum vehementiſſimum producendum requiri longe minorem. Si longitudo nb admodum major ſit longitudine a, quod ita eſt in jactibus fortioribus, erit ſine ſenſibili errore $\alpha = nbP\ log.\ \frac{a}{b}$.

Si tormentum ſit verticaliter erectum, ſit aliquantum diverſus calculus ſed pro vehementioribus jactibus differentia nequit eſſe ſenſibilis. Igitur quia jactus deinceps conſiderabimus tantum vehementiſſimos, brevitatis ergo ponemus $\alpha = nbP \times log.\ \frac{a}{b}$.

(III) Prouti in præcedentibus altitudinem determinavimus debitam ve-

 lo-

locitati qua globus exploditur, ex data vi elaſtica auræ globum ejicientis, ita viciſſim patet, ex obſervata illa altitudine vim auræ elaſticam deduci poſſe, eſt enim

$$n = \alpha : \left(b\,P \log. \frac{a}{b} \right).$$

Exinde poterit vis elaſtica pulveris pyrii ſi non accurate definiri, ſaltem ad terminos reduci, quos certe ſuperabit. At quæres, qui altitudo α experimento determinari poſſit; ad quod reſpondeo, poſſe eam ſat accurate colligi ex tempore, quod globus verticaliter ſurſum ejectus ab exploſionis puncto inſumit, dum in terram delabitur habita in calculo aëris reſiſtentiæ ratione. Transſcribam huc experimenta in *comm. Acad. Petrop. tom. 2. p. p.* 338 & 339 recenſita, quorum calculum inſtitui factis, ratione aëris reſiſtentiæ hypotheſibus, gravitates ſpecificas ferri & aëris eſſe ut 7650 ad 1 & aërem, in quo globus aſcendit, uniformis eſſe denſitatis: gravitatum ſpecificarum ratio paullo major aſſumta fuiſſe videtur quam debebat, ſed compenſabitur in altiſſimis jactibus error à diminutione aëris denſitatum verſus ſuperiora.

„ Tormenti ſitus omni accuratione ad perpendiculum erat accommo-
„ datus & ſingulis vicibus in hunc ſitum reponebatur atque firmabatur: ſin-
„ gula experimenta fuerunt repetita: Erat autem longitudo animæ 7, 7. *ped.*
„ *angl.* diameter globi erat 0, 2375 *ped.* diameter animæ menſurata non fuit
„ neque magnitudo luminis accenſorii: qualibet vice ponderabatur quantitas
„ pulveris pyrii adhibiti & pendulo definiebatur tempus à puncto exploſionis
„ ad punctum, quo globus in terram cecidit: tabula ſequens exhibet, tum
„ quæ obſervata, tum quæ calculo inde eruta fuerunt.

quant. pulv. pyr. numero unciar. holl. expreſſ.	tempus aſc. & deſcens. in min. ſec. obſerv.	altit. jactus in aëre reſiſt. per calculum in ped. Angl.	temp. aſc. in aëre reſiſt. per calculum in min. ſec.	temp. deſc. in aëre reſiſt. per calculum in min. ſec.	altit. jactus in vacuo per calculum in ped. Angl.	temp. aſcenſ. & deſc. in vacuo per calc. in min. ſec.
I	II	III	IV	V	VI	VII
$\frac{1}{2}$	11	486	5, 42	5, 58	541	11, 6
2	34	4550	14, 37	19, 63	13694	58
4	45	7819	16, 84	28, 16	58750	121

„ Pro

„ Pro eodem tormento eodemque globo, ſed priori diminuto pede uno „ cum ſeptem decimis partibus, ſic ut longitudo animæ reſidua eſſet præciſe „ 6. *ped. Angl.* inſervit ſequens tabula eadem lege conſtructa.

I	II	III	IV	V	VI	VII
½	8	257	3,95	4,05	274	8,2
2	20,5	1665	9,74	10,76	2404	24,5
4	28	3187	12,5	15,5	6604	40,5
6	32,5	4304	13,9	18,6	11810	54,3
8	38	5643	15,54	22,46	22394	74

Multa ſunt, quæ ſucceſſum horum experimentorum ita reddunt dubium, ut nullum ſit, quod eandem auræ elaſticitatem arguat. Maximam ego inæqualitatem ex eo oriri crediderim; quod minima pars pulveris inflammetur ſtatim ab exploſionis initio, quod magna pars tum demum accendatur, cum globus orificio tormenti jam proximus eſt, & quod maxima denique pars non inflammata ejiciatur: facit fortaſſe hæc ſola ratio, ut vis elaſtica auræ globum propellentis ſit centies major, quam quæ vi experimenti, nulla habita iſtius rei ratione, prodit: id mihi valde probabile ſit, ex eo quod adhibito in tormento 7, 7 *ped.* longo pulvere ad 4 uncias globus in vacuo jactu ſuo aſcendere potuerit ad altitudinem 58750 *ped.* cum eadem pulveris quantitate eodemque tormento ſed 1, 7 pede decurtato jactus reſponderit altitudini in vacuo 6604 pedum, quæ altitudo vix ultra nonam partem prioris excurrit: Ex comparatione utriusque experimenti conjicio, maximam pulveris quantitatem in tormento longiore inflammatam fuiſſe dum globus jamjam eſſet orificio proximus neque ab ipſo ultra 1, 7 *ped.* amplius diſtaret.

Diminuitur quoque jactus globi à magnitudine luminis accenſorii, ut & ab hiatu qui inter globum & internam animæ ſuperficiem relinquitur, per quod utrumque notabilis auræ pars inutilis avolat: tanta autem inde diminutio non oritur, quantam illam nondum poſito calculo præſumſeram: adjiciam tamen inſequentibus calculum, ut methodus habeatur vi pulveris pyrii longiſſimos ſtatuendi limites, quos etiamnum certe transgrediatur.

(IV) Quod maximam oſtendit auræ elaſticitatem eſt experimentum tertium cum tormento nondum decurtato ſumtum, quod indicat aſcendere potuiſſe globum accepto impetu ad altitudinem $a = 58750$ *ped. Angl.* Erat autem longitudo animæ A G ſeu $a = 7, 7$: longitudo A C (quantum ex amplitudine animæ & gravitate pulveris pyrii conjicio) erat $= 0, 08$. Denique valor ipſius P (ſeu ponderis columnæ mercurialis, cujus baſis ſit circulus maximus globi & cujus altitudo ſit 30. *poll. Angl.* ratione ponderis globi ferri deſignati per unitatem) invenitur poſita gravitate ſpecifica inter mercurium & ferrum ut 17 ad 10 $= 26, 8$: Et cum per §. *III.* ſit proxime $n = a : \left(b \, P \, log \frac{a}{b} \right)$ erit $n = 6004$. Unde ſequitur, ſi aura pulveris pyrii inflammati elaſticitatem habeat ſuæ denſitati proportionalem, eſſe illius maximam elaſticitatem minimum ſexies millies majorem elaſticitate aëris ordinarii.

(V) At vero ſi jam conſideremus partem auræ inutilem, quæ avolat per lumen accenſorium & hiatum à globo relictum, majorem elaſticitatem inveniemus: Calculus qui ad hanc quæſtionem ſolvendam requiritur, cum non parum prolixus atque intricatus ſit, non hæſitavi hypotheſes adhibere paullo liberiores, quibus admodum facilitatur: quamvis ipſæ hypotheſes non ſint omni rigore veræ, errorem tamen notabilem producere non poſſunt. *Primo* ponam utramque aperturam, per quam aura evolare poſſit, eſſe veluti infinite parvam ratione animæ amplitudinis; hoc poſito poterit ſingulis momentis velocitas, cum qua aura avolat, æſtimari immediate ex preſſione ſola: hujusmodi autem hypotheſin ſine ullo ſenſibili errore fieri poſſe pro omni fluido, tunc etiam cum foramina non ſunt admodum exigua, paſſim ut corollarium ex theoria noſtra deduximus, & multo facilius aſſumi poſſe in fluido valde elaſtico facile quisque videbit ex eo, quod incrementum *aſcenſus potentialis* ratione motus interni longe minus eſt ratione *aſcenſus potentialis* particulæ per foramen exilientis in fluido, quod à propria elaſticitate expellitur, quam quod gravitatis vi ejicitur: in priori enim minor eſt motus localis internus quam in altero. *Secundo* auræ pulveris pyrii inflammati vim elaſticam tantam eſſe, ut niſus atmoſphæræ contrarius attendi non mereatur: *tertio* velocitatem globi in tormento utut permagnam, tamen minimam cenſeri poſſe ratione velocitatis, qua aura per hiatum utrumque avolat, quia nempe inertia iſtius auræ non poteſt non admodum eſſe exigua ratione inertiæ

ertiæ quæ globo ineſt : vi iſtius hypotheſeos avolabit aura per utramque aperturam eadem velocitate, cum alias poſita velocitate in lumine accenſorio $= \sqrt{A}$, & velocitate globi $= v$, velocitas auræ in hiatu à globo ad ſuperficiem animæ relicto dicenda eſſet $= \sqrt{A} - v$. Venio nunc ad ſolutionem.

(VI) Primo notandum eſt, ſi elaſticitates auræ cenſeantur denſitatibus proportionales, fore ut aura conſtanter eadem velocitate per utramque aperturam avolet, uti vidimus in problemate §. 34. iſtaque velocitas nominatim talis erit, quæ generetur ab altitudine auræ homogeneæ, cujus pondus auram captam coërcere poſſit, ne ſe expandat. Igitur determinabitur dicta velocitas hoc modo : ſit gravitas globi $= 1$, elaſticitas ſeu pondus quod auram pulveris modo inflammati A C D B in illo compreſſionis ſtatu coërcere poſſit $=$ P : pondus pulveris adhibiti $= p$; erit pondus auræ pulveris modo inflammati etiam $= p$: ſique longitudo AC ponitur $= b$, patet altitudinem auræ homogeneæ, quæ pondus P habeat, fore $= \frac{P}{p} b$; Igitur velocitas quacum aura recens nata per lumen accenſorium avolat eſt $= \sqrt{\left(\frac{P}{p} b\right)}$, eademque velocitate durante tota exploſione ejicietur, idque non ſolum per lumen accenſorium, ſed & proxime per hiatum inter globum & animam relictum.

(VII) Sit nunc porro amplitudo animæ $=$ F; hiatus interceptus inter globum & animam $= f$: amplitudo luminis accenſorii $= \phi$: longitudo animæ $= a$, quantitas auræ ab initio exploſionis $= g$. Intelligatur deinde globus perveniſſe ex E in e, dicaturque A C $= x$: quantitas auræ eo temporis puncto in tormento reſidua $= z$: velocitas globi in iſto ſitu $= v$, reliquæ denominationes fuerunt jam antea explicatæ.

Quoniam elaſticitas per hypotheſin eſt directe ut quantitas & reciproce ut ſpatium, erit elaſticitas auræ in A c d B reſiduæ $= \frac{zb}{gx}$ P : quæ quidem non tota in propellendum globum impenditur, ſed tantum pars ejus, quæ ſe habeat ad totam ut F$-f$ ad f. Eſt itaque poſito dt pro elemento temporis

$$dv = \frac{F-f}{F} \times \frac{zb}{gx} P \times dt.$$

Per methodum autem §. 34. exhibitam, ubi quantitas aëris dato tempuſculo effluens ſpecifice definita fuit, invenitur $-dz$

$$-dz = \frac{f+\phi}{F} \times \frac{2}{x} \times \sqrt{\left(\frac{P}{p} b\right)} x dt;$$

Ex comparatione harum duarum æquationum oritur

$$-dz = \frac{f+\phi}{F-f} \times \frac{g}{b} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{Pp}} \times dv,$$

quæ cum debitæ conſtantis additione integrata dat

$$z = g - \frac{f+\phi}{F-f} \times \frac{g}{b} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{Pp}} \times v.$$

Si jam in æquatione prima ſubſtituatur valor iſte inventus pro z, ſimulque ponatur $\frac{dx}{v}$ pro dt, fiet

$$v dv = \frac{F-f}{F} \times \frac{b}{x} \times P \times dx - \frac{f+\phi}{F} \times \frac{\sqrt{(bP)}}{x\sqrt{p}} \times v dx, \text{ ſive}$$

$$\frac{F v dv \sqrt{p}}{(F-f) \times bP\sqrt{p} - (f+\phi) \times v\sqrt{(bP)}} = \frac{dx}{x},$$

quæ æquatio poſt debitam ſui integrationem, facta $x = a$, abit in hanc

$$\log. \frac{a}{b} = \left[-F(f+\varphi) v\sqrt{p} - F(F-f) p\sqrt{(Pb)} \times \log.\left(1 - \frac{(f+\varphi)v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}\right)\right] : (f+\varphi)^2 \times \sqrt{Pb}.$$

(VIII) Si jam per experimentum innotuerit valor ipſius v, poterit inde deduci valor ipſius P, qui denotat elaſticitatem auræ pulveris pyrii nondum expanſæ: Quod ut exemplo illuſtremus, eodem utemur experimento, quod jam articulo IV. expoſuimus, ut appareat inde, quodnam ab avolatione auræ elaſticitatis augmentum arguat. Sic igitur ponetur calculus.

Quia pondus globi, quod erat trium librarum, indicavimus per unitatem, erunt quatuor unicæ pulveris adhibitæ exprimendæ per $\frac{1}{12}$: igitur $p = \frac{1}{12}$. Menſuras aperturarum, quas conſideramus, non accepi: ſolet autem hiatus à globo relictus conſtituere in ſimili tormento præterpropter partem decimam quintam amplitudinis animæ; amplitudinem luminis accenſorii hic fere negligi poſſe puto; itaque ſtatuam $F = 15$; $f = 1$; $\Phi = 0$: Deinde habetur rurſus $a = 7,7$; $b = 0,08$; altitudo ad quam globus in vacuo aſcendere poſſit ſeu $\frac{1}{2} vv = 58750$, ſeu $v = 343$: Igitur æquatio ultima ſuperioris articuli hæc erit

$$\log. 96 = \frac{-5251}{\sqrt{P}} + 17,5 \log. \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}-300},$$

cui proxime ſatisfit cum ſumitur $\sqrt{P} = 534$ & proinde $P = 285156$, quod efficit pondus columnæ mercurialis ejusdem cum anima tormenti ampliplitudinis, cujus altitudo ſit plusquam 10000 vicibus major altitudine communi barometri, invenimus autem ſupra *art. IV.* numerum n (qui idem ſignificabat) $= 6004$. Ergo jam tuto affirmabimus (ubique enim quæ negleximus majorem vim pulveri arguunt) ineſſe pulveri pyrio vim elaſticam, minimum decies millies majorem vi elaſtica aëris ordinarii. Apparet autem ſimul ex comparatione numerorum 10000 & 6004, quantum circiter vi pulveris decedat ab hiatibus ſæpe dictis. Equidem iſtud decrementum majus putaſſem: Confirmatus autem ſum hoc calculo in re de qua aliquando me certiorem voluit vir harum rerum gnarus, nullum nempe ſe in tormentis notabile obſervaſſe decrementum, cum lumen accenſorium diuturno uſu ſupra modum amplificatum eſſet in obſidio.

(IX) Verum ut ex æquatione noſtra quædam corollaria deduci poſſint faciliora quamvis proxime tantum vera, mutabimus quantitatem logarithmicalem in ſeriem. Eſt autem

$$-\log.\left(1-\frac{(f+\phi)v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}\right)=\frac{(f+\phi)v}{(F-f)\sqrt{(bPp)}}$$

$$+\frac{(f+\phi)^2vv}{2(F-f)^2\times bPp}+\frac{(f+\phi)^3v^3}{3(F-f)^3\times bPp\sqrt{(bPp)}}+\&c.$$

Iſtoque valore ſubſtituto in æquatione ultima *art.* (*VII*) fit

$$\log.\frac{a}{b}=\frac{Fvv}{2(F-f).bP}+\frac{F.(f+\phi)v^3}{3.(F-f)^2bP\sqrt{(bPp)}}+\&c.$$

Notabimus hic iſtam æquationem perfecte convenire cum æquatione ultima *art.* (*II*) ſi aperturæ f & ϕ ponantur $=o$: quod enim hic indicatur per $\frac{1}{2}vv$ & nP ibi eſt a & P, convenientibus denominationibus reliquis.

(X) Ut appareat, quantum proxime altitudo jactus ab aperturis diminuatur, ſi iſtæ aperturæ ſint minimæ, inſerviet hæc æquatio. Intelligatur per α altitudo ad quam globus pervenire poſſit in vacuo, ſi nulla auræ quantitas per aperturas avolare ponatur, & erit decrementum iſtius altitudinis ab eruptione auræ per eaſdem aperturas oriundum proxime hoc

$$[(2\alpha)^{\frac{3}{2}}\times(f+\phi)]:[3F\times\sqrt{(bPp)}].$$

Unde

Unde in eodem tormento adhibitaque eadem pulveris quantitate & manente globi pondere, erunt decrementa jactuum proportronalia amplitudinibus aperturarum.

Decrementa eadem fere sequuntur rationem subduplicatam quantitatum pulveris adhibitarum cæteris paribus; quia enim logarithmi magnorum numerorum in multo minori crescunt ratione ac numeri ipsi & quoniam insuper est $\alpha = b\,P\,log.\,\frac{a}{b}$, poterit cæteris paribus statui α proportionale ipsi b, quia P non afficitur à b. Sed decrementum, de quo sermo est, ceteris paribus rationem sequitur quantitatis $(\alpha^{\frac{3}{2}}):(\sqrt{bp})$ seu rationem quantitatis $\frac{b}{\sqrt{p}}$; ipsum vero p, quod pondus denotat pulveris adhibiti est ut b; igitur decrementum prædictum sequitur proxime rationem $\sqrt{b}$, quæ subduplicata est quantitatis pulveris adhibiti. Igitur ratione habita jactuum, decrementa multo majora sunt in jactibus debilibus, quam vehementioribus, idque etiam experimenta *art.* (*III*) recensita confirmare videntur: non video enim aliam rationem, cur in prima tabula experimentorum globi jactus in vacuo, sumtis duabus pulveris unciis, plus quam vigesies sexies altior esse debuerit, quam cum uncia dimidia sumeretur, & cur mox duplicata pulveris quantitate ad 4. uncias jactus tantum quadruplo altior post calculum prodeat, quam quantitate duarum unciarum.

(XI) Quæ reliquæ in utraque tabula comparent experimentorum inæqualitates, eas ut supra dixi, maximam partem derivo ab eo, quod pulvis non omnis inflammatur, nec is qui inflammetur omnis statim ab initio explosionis flammam concipiat. Neque certe id mirabimur, cum perpendimus totum explosionis tempus in *exper.* 4. *tab.* 1. nequidem centesimam unius minuti secundi partem efficere. Igitur cum certum sit maximam pulveris partem non inflammatam ejici, nec exiguam partem reliqui tardius inflammari, quam in calculo positum fuit; cumque præterea notabilis pulveris pars fucata sit vaporibus materiaque terrestri, quæ non accenditur, sequitur longe majorem inesse elasticitatem partibus accensis, quam quæ experimenti calculo *art.* (X.) determinata fuit, fortasse decies aut centies major est.

At vero sit tantum talis, quam experimentum ostendit, elasticitate nem-

nempe aëris ordinarii decies millies major; ſequitur inde auram illam elaſticam, quæ ex pulvere pyrio accenſo elicitur aut non aërem eſſe communem aut elaſticitates in majori ratione creſcere quam denſitates: non poteſt enim denſitas aëris, qui à pulvere modo inflammato oritur, eſſe plus quam millies denſitate aëris ordinarii major, ſi pulvis vel totus ex aëre compreſſo compoſitus ſit, quod ex gravitate pulveris ſpecifica ratione aëris concludo.

Quæſtio interim jamdudum eſt agitata, an aura elaſtica factitia, quæ ex corporibus deducitur, aër ſit ordinarius nec ne, quam ego quæſtionem non decidam.

Si tamen ponatur, pulverem pyrium aërem eſſe naturali millies denſiorem & decies millies magis élaſticum, tum ex §. 4. ſequetur, aërem vi infinita compreſſum non poſſe pluribus quam 1331. vicibus condenſari & ſecundum eandem regulam foret aëris naturali quadruplo denſioris elaſticitas ad elaſticitatem aëris naturalis ut $4\frac{1}{4}$ ad 1.

An vero experimenta ab aliis inſtituta, quæ harum elaſticitatum rationem faciunt accurate ut 4 ad 1 ſufficiente accuratione facta fuerint & an calor aëris dum comprimebatur idem permanſerit? neſcio. Veroſimile autem eſt, eandem auram quæ in poris pulveris pyrii latet, cauſam eſſe elaſticitatis corporum elaſticorum aut villorum contractilium: dum enim in cavernulis ſcatet, ſi corpora in figuram inſolitam vi quadam redigantur, comprimitur aura elaſtica, cavernuliſque dum reddit figuram capaciſſimam corpus reſtituit in priſtinam figuram & longitudinem.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO UNDECIMA.
De fluidis in vorticem actis, tum etiam de iis, quæ in vasis motis continentur.

§. I.

Ex eo tempore quo Keplerus & Cartesius vortices adhibuere pro variis naturæ phænomenis explicandis, multi operam suam haud male se collocaturos rati sollicite istud argumentum ruminati sunt: primus autem, ni fallor, naturam ejus recte penetravit Hugenius in *tract. sur la pesanteur*; superaddam quædam, quæ ad institutum meum pertinent, ab aliis fortasse non satis examinata.

Poni autem solent vortices ad statum *permanentiæ* seu durationis reducti, ita ut nulli mutationi subjectum lege constanter eadem moveatur fluidum.

Fig. 65. & 66. §. 2. Sit cylindrus ABCD (Fig. 65. & 66.) verticaliter positus, cujus axis GH, isque ad certam altitudinem plenus sit, concipiatur aqua in vorticem acta sintque omnia jam ad statum durationis reducta: Ita superficies aquæ deprimetur versus axem & elevabitur versus latera: Sectionem per axem terminatam à superficie aquæ repræsentabimus curva EOF, hujusque curvæ nunc indolem dabimus ex data relatione, quam inter se habent velocitates sub certis ab axe distantiis.

Ducantur ga & fn infinite propinquæ & horizontales, agaturque am verticalis: Sit $Og = x$, gf seu $am = dx$, $ga = y$, $mn = dy$: Patet autem quamlibet guttulam in superficie positam nisu suo, ex vi centrifuga horizontali & vi gravitatis verticali, composito perpendiculariter superficiei insistere, quia si oblique contranitatur nihil sit, quod guttulam in loco suo conservet.

Igitur si vis centrifuga guttulæ in a positæ exprimatur per horizontalem

ba

ba & vis gravitatis per verticalem ca compleaturque rectangulum $abec$, erit diagonalis ae ad curvam perpendicularis; unde triangulum eca simile est triangulo amn & sic $dx : dy = ec : ca = ba : ca$, vel ut vis centrifuga in puncto a ad vim gravitatis.

Demonstravit autem Hugenius vim centrifugam corporis in gyrum acti celeritate, quam lapsu libero per altitudinem dimidii radii acquirere possit, æqualem esse vi suæ gravitatis: quod si proinde altitudo respondens guttulæ velocitati gyratoriæ dicatur V; vis gravitalis g: erit vis centrifuga $= \frac{2gV}{y}$, unde $dx : dy = \frac{2gV}{y} : g$, vel $dx = \frac{2V\,dy}{y}$.

§. 3. Si ponatur $V = \frac{1}{2}y$, fiet $x = y$ & proinde linea EO erit recta constituens cum axe GH angulum semirectum habebitque cavitas formam coni: Si vero servata eadem proportione velocitatum, quæ nempe sint ubique radicibus distantiarum ab axe proportionales, aquæ celerius tardiusve circumagantur, fiet angulus EOG eo acutior, quo celerius moventur, ita ut si infinita fuerit velocitas, tunc aquæ perpendiculariter fundo insistere debeant instar muri, cavitatemque cylindricam interius formare, si modo operculum sit in AD, quod impediat, quominus aquæ omnes ejiciantur.

§. 4. Si ponatur paullo generalius $2V = fy^e$, fiet $dx = fy^{e-1}dy$ vel $x = \frac{f}{e}y^e$: Hinc sequitur curvam semper fore versus axem concavam, ut in figura 65, si sit e major unitate atque convexam, ut in fig. 66. si sit minor. In priori casu est angulus EOG semper rectus, in altero semper nullus: in solo casu quo $e = 1$ potest angulus iste esse qualiscunque.

§. 5. Inservire possunt hæc ad dignoscendam quodammodo scalam velocitatum in vortice artificiose producto: si enim superficiem videas concavam, recte judicabis velocitates majori crescre ratione, quam distantiæ ab axe crescant, si convexam contrarium deduces. Si curva non videatur ad parabolicum genus pertinere, indicium erit velocitates non posse comparari cum distantiarum determinata aliqua potentia. Quo major observata fuerit linea EM terminata ab horizontali OM, eo major putabitur velocitas particularum absoluta seu littera f.

§. 6. Existimo autem non posse vorticem in statu suo per tempus aliquod notabile permanere, si vires centrifugæ partium æqualium in fluido homogeneo crescant ab axe versus peripheriam: hoc enim si esset, cum nihil sit, quod partium axi viciniorum vim centrifugam sufficienter coërceat, fieret utique, ut partes illæ viciniores perpetuo ab axe recederent, remotioresque ad illum propellerent, neque unquam in hoc statu æquilibrium aut status durationis obtineri posset. Apparet inde quantitatem hanc $\frac{2gV}{y}$ (quæ nempe in fluidis homogeneis vim centrifugam partium æqualium exprimit) aut una crescere cum y aut saltem non decrescere, atque sic si rursus ad specialem hypothesin antea factam ($2V = fy^e$) descendamus, non poterit e esse minor unitate. Igitur in omnibus vorticibus, de quibus hic sermo est, ad statum durationis reductis, superficies nunquam convexa erit, ut in figura 66, sed semper aut concava, ut in figura 65. aut conica: & quia e vel major est unitate vel eidem æqualis, aliter fieri non potest, quin velocitates aut æquali aut majori ratione crescant cum radicibus distantiarum ab axe. Hæc cum ita mecum perpendo, non intelligo quemadmodum Newtonus fingere sibi potuerit duos vortices fluidi ubique homogenei ad statum perpetuæ durationis reductos, in quorum altero *tempora periodica partium sint ut earum distantiæ ab axe cylindri, in altero autem ut quadrata distantiarum à centro sphæræ*: Nam in horum vorticum altero velocitates ubique essent æquales, & in altero plane decrescerent ab axe versus peripheriam.

Magis verosimile est, in plerisque vorticibus, qui statum perdurationis jam attigerint, fluidi sive homogenei sive heterogenei partium singularum tempora periodica eadem fore, quasi totus cylindrus solidus fuerit, partes autem quæ sint specifice graviores circumferentiæ, viciniores futuras esse. In hoc casu fit v proportionale ipsi y & V proportionale ejusdem quadrato, curvaque E O F erit parabola Apolloniana, cujus vertex in O & cujus axis sit O G.

Præsertim hæc ita proxime fore præsumo, si vortex generetur à rotatione vasis cylindrici circa axem H G, vel etiam ab agitatione uniformi baculi juxta latera vasis, cujusmodi vorticum phænomena exposuit *D. Saulmon in Comm. Acad. Reg. sc. Paris. a.* 1716.

§. 7. Pressiones quas diversæ cylindri A B C D partes à fluido sustinent, pro-

proportionales ſunt altitudinibus columnarum verticalium iisdem partibus reſpondentium : neque enim requiritur, ut huic ponderi conatum fluidi à vi centrifuga oriundum addamus, quia conatus iſte effectum jam obtinuit in elevandis aquis: Atque ſi vas non fuerit cylindricum ſed irregularis utcunque ſtructuræ, licebit cylindrum fingere, cujus axis coincidat cum axe rotationis, fluido ita plenum, ut punctum O tam in vaſe propoſito quam in cylindro fictitio in eodem loco poſitum ſit: tanta enim in quovis cylindri puncto preſſio erit, quanta eſt in eodem puncto, quatenus id ad vas propoſitum pertinet. Apparet ex hoc ipſo, poſſe ſuperficies vorticum ex alio principio quam quo ante uſi ſumus definiri: Ducta nempe linea horizontali O M & verticali N a cum ſua infinite propinque $p\,n$ ſequitur altitudinem Na ſeu Og proportionalem eſſe vi centrifugæ omnium particularum quæ ſunt in O N & differentiam altitudinum duarum proximarum, nempe $a\,m$ ſeu gf, proportionalem vi centrifugæ particulæ Np: Unde rurſus derivatur æquatio finalis, quam §. 2. dedimus, nempe $dx = \frac{2V\,dy}{y}$.

§. 8. Videamus nunc quid accidere debeat corporibus vortici innatantibus; ut autem quæſtio eo diſtinctior atque ſimplicior fiat, corporis loco conſiderabimus globulum parvum ejusdem cum fluido vorticoſo gravitatis ſpecificæ.

Globulus talis fluido commiſſus duabus ſtatim potentiis ſollicitatur, altera tangentiali ab impetu fluidi ortum trahente, altera centripeta, quæ à vi fluidi centrifuga naſcitur. Iſtæ vires conſtantem ſervant inter ſe rationem, quadratam nempe velocitatis fluidi *reſpectivæ*; ſive quieſcat corpus ſive motu circulari feratur.

Notari autem meretur ab iis, qui in explicandis gravitatis phænomenis, adhærent principiis Carteſianis, vim tangentialem eſſe incomparabiliter majorem vi centripeta: eſt enim illa ad hanc, ut diſtantia corporis ab axe vorticis ad octo tertias partes diametri globi; demonſtrationem videre eſt in *Comment. Acad. Petrop. tom. II. p.* 318. & 319.

§. 9. Quamvis ſciam multa à variis allegata fuiſſe, ut oſtenderent, materiam ſubtilem celerrime in vorticem actam corpora quidem verſus axem detrudere poſſe neque tamen inde ſequi, ut ſimul à vortice deferantur iſta corpo-

ra,

ra, non potui tamen hunc mihi ſcrupulum eximere, poſtquam cognovi vim tangentialem vi centripeta eſſe pene infinite majorem. An non melius huic difficultati occurritur, ſi duos ſuper eodem axe vortices ſtatuamus contrarios & æqualis virtutis: Videtur enim, phænomena naturæ plurima conciliari non poſſe cum vorticum hypotheſi, niſi ponamus duos pluresve vortices liberrime ſub qualicunque directione ſe invicem trajicere poſſe: vel ſola gravitatio communis omnium corporum cæleſtium verſus ſe invicem, quæ in dubium vocari nequit, ſatis oſtendit aut valedicendum eſſe hypotheſi vorticum, aut liberrimam vorticum plurium in omnes plagas decusſationem ſtatuendam eſſe. Si igitur duo vortices æqualis virtutis contrarii ſuper eodemque axe fingerentur, tunc impetus contrarii deſtruerent vires utriuſque vorticis tangentiales; ſimul autem uterque vortex concurreret ad corpus verſus axem communem deprimendum.

§. 10. Altera accedit difficultas, quominus poſſit corporum gravitas peti ex effectu duorum vorticum contrariorum ſuper eodem axe motorum. Ita enim corpora non verſus punctum commune aut quaſi punctum ſed verſus axem gravitarent, motuque ad eundem perpendiculari laberentur, quod cum deſcenſu corporum verticali & rotunditate vel quaſi rotunditate terræ corporumque cœleſtium pugnat.

Huic alteri quoque difficultati occurretur, ſi fingantur duo axes ad ſe invicem perpendiculares aut proxime tales, circa quorum utrumque duo vortices contrarii æqualis virtutis circumagantur. Namque vis compoſita omnium vorticum ita intelligi poteſt comparata, ut corpus detrudat proxime verſus punctum, quo ambo axes ſe invicem interſecant; ſemper tamen foret terra aliquantum compreſſa verſus planum per ambos axes tranſiens. Poterit autem vel huic incommodo, ſi modo incommodum ſit, obviam iri, multiplicando admodum vorticum numerum: nam ſi vel infiniti fere ſtatuantur vortices, poterunt omnes eadem facilitate ſe trajicere, ac radii luminis, qui ſe minime impediunt.

Volui iſta hic adjicere in gratiam eorum, qui vorticibus delectantur, ut videant, an motus iſte facilius concipi poſſit eo, quem Hugenius finxit: utroque enim phænomena naturæ æqualiter explicari poſſunt. Hanc ſententiam paullo accuratius expoſui in diſſertatione, quam Academia Reg. Sc. Pariſ. præmio a. 1734. affectam imprimi curavit.

§. 11.

§. 11. Quia dubitari nequit, quin omnes planetæ versus solem & satellites versus suos planetas ad mentem Newtoni *graviteant*, hujusque gravitatis causa affinis sit cum illa qua corpora terrestria versus centrum terræ tendunt, erit vorticum hypothesis ad totum systema mundi extendenda, si pro gravitate corporum terrestrium explicanda adhibeatur. Ita vero planetæ, materiæ subtili innatantes, moverentur in medio resistente, paulatimque de motu suo aliquid perdentes ad centrum solis accedere sub forma spiralis deberent: hoc vero cum ex antiquissimis observationibus non appareat, postulat vorticum hypothesis, ut fluidum vorticosum ponatur supra modum rarum atque subtile idque velocitate, quam mens humana vix assequi possit, motum: quo enim rarius fluidum, eo celerius motum fingas necesse est. Fortasse oportunius motuum perennitas explicabitur à communicatione quadam motus reciproca, ita ut quas modo corpus cœleste propulsit particulas, ab his alio tempore vi simili propellatur.

§. 12. Venio jam ad reliquas corporum gravitantium proprietates, quæ ex hypothesi vorticum sequuntur. Ponamus itaque corpus in fluido vorticoso quiescens, quod nullas fluidi particulas per poros suos transmittat: ita tendet corpus versus centrum vorticis, eritque vis ejus centripeta præcise æqualis vi centrifugæ fluidi vorticosi, quod sub simili volumine in eadem à centro distantia positum sit. Ergo corpora quæcunque in simili vorticis loco constituta eandem habent vim centripetam si idem habeant volumen, etiamsi quantitates materiæ in uno quoque corpore sint utcunque inæquales, & si hujusmodi corpora libere versus centrum vorticis moveri possint, ferentur velocitatibus inæqualibus reciproce scilicet proportionalibus quantitatum materiæ radicibus quadratis, si spatia emensa sint æqualia.

§. 13. Quæ in præcedente paragrapho monita sunt, facile applicantur gravitati corporum, si modo principium gravitatis sit vis centrifuga alicujus materiæ subtilis celerrime in vorticem actæ. Quia vero experientia docet omnia corpora terrestria in vacuo simili descendere velocitate omniaque corpora è filo suspensa æquali vibrationes facere tautochronas, inde concludemus, *particulas ultimas graves*, per quas nempe fluidum gravificum penetrare nequeat, in omnibus corporibus terrestribus esse æqualis densitatis specificæ, id est, sub æqualibus voluminibus æquales *materiæ solidæ* quantitates continere, idque non minus in *particulis gravibus*, quæ aurum quam quæ plumas componunt. Ne

 vero

vero hæc secus ac volo explicentur dicendum mihi erit, quid intelligam *per ultimas particulas graves* & per *materiam solidam* ipsis insitam.

§. 14. Sunt igitur *particulæ graves* proprie sic dictæ illæ, quæ impenetrabiles sunt materiæ subtili vorticosæ: hujusmodi enim particulæ idem faciunt quod corpora in vortice posita, de quibus §. 12. diximus: quamvis autem impenetrabiles sint materiæ subtili modo dictæ, non crediderim tamen illas perfecte solidas, quales Hugenius præsumsisse videtur *in tract. suo de gravitate*, id est tales quorum spatium totum materia repletum sit sine poris aut fluido interfluo: existimo potius has *particulas graves* suos rursus habere poros, atque in illis fluidum aliud esse longum subtilius, quod particulas graves eadem libertate trajicit, qua fluidum gravificum fluit per corpora sensibilia: residuum vero quod in *particulis gravibus* sibi cohæret voco *materiam solidam* ad particulas easdem pertinentem.

§. 15. Perspicuum ex his est, diversas corporum gravitates specificas minime petendas esse ex diversa densitate *particularum gravium*, sed ex eo, quod hæ particulæ possint esse in diversis corporibus sub eodem volumine numero inæquales, aut etiam magnitudine, sic ut in corporibus compactioribus majorisve gravitatis specificæ *particulæ graves*, vel minoribus interstitiis positæ vel volumine majores sint.

Etsi vero diversas densitates specificas habuissent *particulæ graves* in diversis corporibus, non propterea diversas habitura fuissent gravitates specificas corpora cæteris positis paribus: talia autem corpora ex alto delapsa diversa inter se velocitate fuissent descensura versus centrum terræ: Fieri itaque potuisset, ut corpora æqualis gravitatis specificæ, vel in vacuo communiter ita dicto inæquali velocitate descendissent non minus atque corpora videmus diversæ gravitatis specificæ æquali velocitate descendentia: In hujusmodi autem corporibus leges motuum longe aliæ forent, atque nunc sunt, ubi massæ ex solis ponderibus æstimantur.

§. 16. Cæterum quia omnia, quantum experientia constat, corpora terrestria habent suas *particulas graves* æqualis densitatis specificæ, ut §. 13. monitum fuit, facile quidem inducar, ut credam idem in omnibus planetis fieri seorsim consideratis: Planetas vero inter se comparatos *particulas* suas *graves* diververſæ habere denſitatis ſpecificæ mihi admodum eſt probabile, quia nullam video rationem, cur in omnibus planetis ſimiles eſſe debeant iſtæ particulæ. Sed à *particularum gravium* denſitate in quolibet planeta pendet hujus vis centrifuga ſeu conatus recedendi à ſole. Igitur nondum licet colligere *planetarum vires centrifugas ſe habere, in ratione quadrata reciproca eorundem diſtantiarum à ſole ex eo, quod tempora periodica rationem ſequantur ſeſquiplicatam diſtantiarum:* talis enim concluſio ſupponit ſimilem in omnibus planetis *particularum gravium* denſitatem.

§. 17. Planetarum vires centrifugæ æquales utique ſunt viribus contrariis quibus verſus ſolem trahuntur: Quia autem, ut dixi in ſuperiori paragrapho, nondum certum eſt, in quanam ratione reſpectu diſtantiarum à ſole vires planetarum centrifugæ mutentur, ideo neque de eorum viribus gravitatis verſus ſolem aliquid certi ſtatuere licet; Et plurima quidem ſunt in vorticum hypotheſi, quæ vires gravitatis in diverſis diſtantiis conſtituunt & determinant.

Cum enim vis gravitatis ſit æqualis vi centrifugæ materiæ ſubtilis, quæ particulas corporis graves penetrare nequit, ſequitur eo majorem eſſe vim gravitatis, quo majori materiæ ſubtilis quantitati tranſitus negatur; quia vero ſcimus corpus ſæpe fluido uni impenetrabile eſſe, quod alii fluido ſubtiliori liberrimum concedit transfluxum, fieri poteſt, ſi modo materiam vorticoſam in diverſis à centro vorticis diſtantiis inæqualiter ſubtilem putemus, ut unus idemque planeta in inæqualibus à ſole diſtantiis inæqualiter ad ſolem pellatur, quod idem facilius contingere poteſt in diverſis planetis, quia accedit diverſa quæ eſſe poteſt particularum gravium, ſtructura.

Præter hæc ſunt etiam diverſa materiæ vorticoſæ denſitas, velocitas diſtantiaque à centro, quæ concurrunt ad vim gravitatis formandam. Si vero eorum ratio habeatur, apparebit poſſe quidem vires gravitatis decreſcere creſcentibus diſtantiis à centro virium, neque tamen propterea vires centrifugas æqualium materiæ vorticoſæ voluminum pariter decreſcere, quod poſterius ob rationem §. 6. expoſitam fieri non poſſe exiſtimo.

Iſta vero quæ generaliter & obiter diſputavimus de natura vorticum eorumque ad Phænomena gravitatis applicatione, ſufficiant: animus non fuit

 vor-

vorticum commendare hypothesin, sed quasdam tantum inde conclusiones facere, sine quibus ipsam hypothesin subsistere non posse crediderim.

Venio jam ad alteram sectionis partem, qua breviter considerabimus statum fluidorum, quæ intra vasa mota continentur: Argumentum est fertilissimum infinitisque modis variabile: Sed pauca attingemus, ceu exempla, ad quæ multa alia revocari poterunt.

§. 18. Si aqua in vase perforato contineatur ipsumque vas libere cadat, ex se patet, nihil aquæ durante vasis lapsu esse effluxurum, quia nempe particulæ superiores non gravitant in inferiores: Si vas motu quidem accelerato descendat sed tardiore quam quo corpora naturaliter in vacuo accelerantur, effluet aqua, sed minori velocitate ac si vas quiescat: Contrarium erit, si vas motu accelerato sursum trahatur: Denique si vas horizontaliter accelerato motu feratur (jam enim ad reliquas non attendemus directiones) fieri potest, ut velocitas aquæ effluentis major sit vel minor velocitate ordinaria pro ratione situs foraminis: Velocitates autem aquæ sic determinabuntur.

Fig. 67. §. 19. Sit v. gr. cylindus ACDB (Fig. 67.) aqua plenus usque in AB, cujus fundum CD foramen habeat in E valde parvum per quod aquæ effluant, dum interea totum vas sursum trahatur à pondere P descendente mediante funiculo super duabus trochleis H & G excurrente. Denique constanter tantum aquæ superius affundi ponatur, quantum effluit per foramen E: pondus vero cylindri & aquæ in eo contentæ indicetur per p. Ita apparet quamlibet guttam aquæ in vase veluti stagnantis vi animari ad ascensum quæ se habeat ad vim gravitatis naturalem ut $\frac{P-p}{P+p}$ ad 1: Quia vero reactio guttulæ in fundum æqualis est vi, qua ad ascensum animatur quævis guttula, præter pressionem naturalem aliam exeret in fundum, quæ exprimenda erit per $\frac{P-p}{P+p}$. Utraquè vero pressio simul sumta erit ad pressionem solam naturalem ut $\frac{2P}{P+p}$ ad 1, adeo ut fundum haud secus ab incumbente aqua prematur, quam si cylindrus quiesceret essetque altitudo aquæ $= \frac{2P}{P+p} \times AC$, ex quo ipso sequitur altitudinem velocitati aquæ uniformiter effluentis debitam esse $= \frac{2P}{P+p} \times AC$.

Igitur

Igitur si $P = 0$, nulla effluet aqua, cadente vase motu naturaliter accelerato: si $P = p$, effluet aqua, velocitate ordinaria, quia tunc vas quiescit; atque si $P = \infty$, erit velocitas aquæ effluentis ad velocitatem ordinariam ut $\surd 2$ ad 1.

§. 20. Quæritur nunc quid accidere debeat fluido, quod in vase continetur, cui motus horizontalis uniformiter acceleratus imprimitur. Id vero facillimum est videre ex hoc solo, quod nunc inertia particularum ceu directioni, sub qua vas movetur, contraria fit horizontalis, dum gravitatis earundem est verticalis: Utraque vero manet constanter eadem.

Igitur postquam fluidum ad statum durationis seu *permanentiæ* pervenit, superficies ejus plana erit, sed inclinata versus plagam motus. Angulus autem inclinationis determinabitur ut sequitur.

Sit vas cylindricum ACDL (Fig. 68.) verticaliter positum, quod super plano horizontali CDH, mediante pondere P ope trochleæ G vasi annexo in S movetur motu uniformiter accelerato, sitque pondus vasis & aquæ in illo contentæ ad pondus P ut p ad P: gravitatio naturalis $= 1$; eritque nisus cujuslibet guttulæ in directione G S ratione suæ gravitationis $= \frac{P}{P+p}$: Igitur si AB sit in eodem plano cum SG & cum superficie aquæ, ducaturque AL, patet actionem gravitatis naturalis fore ad reactionem à pondere P oriundam, ut BL ad AL seu ut 1 ad $\frac{P}{P+p}$: vocatoque sinu toto 1, fore sinum anguli Fig. 68.

$$LAB = \frac{P}{\surd(2PP + 2Pp + pp)}.$$

Hinc etiam intelligitur fundum CD majorem ab incumbente aqua pressionem pati in C quam in D, idque in ratione altitudinum AC & BD: sique idem fundum perforetur minimo foraminulo, aquam ejectum iri velocitate, quæ respondeat altitudini columnæ verticalis superincumbentis. Ita vero erit, postquam omnia jam ad statum *permanentiæ* pervenerint; si pondus P veriabile sit, nunquam in eodem situ permanebit superficies AB: à pondere autem isto pendet velocitas, qua vas movetur in singulis locis. Igitur si totum pondus auferatur, postquam vas jam motum acquisiverit, perget vas suâ velocitate moveri, superficies autem aquæ declivitatem deponet, rursusque ad situm horizontalem componetur, veluti si quiescat vas; in his adeoque casibus non est vasis motus, qui fluidorum statum permutet, sed motus variatio.

§. 21. Quod in præcedente paragrapho monuimus de vase cylindrico verticaliter posito facile extenditur ad vas cujuscunque figuræ: qualis enim est inclinatio superficiei aqueæ A B ad horizontem in vase cylindrivo, talis erit in omnibus reliquis vasis: pressio autem aquæ in latera vasis ubique definietur, si columna concipiatur verticalis ab eo puncto, pro quo pressio aquæ definienda est, usque ad superficiem aquæ, quæ cogitatione producenda erit, si id opus fuerit. Si loco vasis sumatur v. gr. tubus ab utraque parte inflexus, veluti A C D L (Fig. 69.) isque moveatur in directione C D, tum utraque superficies M, N situm mutabit in A, B, donec recta A B debitam obtineat inclinationem antea definitam; fieri etiam potest ut pars aquæ efflat per A, priusquam æquilibrium adsit: si crus D L deorsum spectet, ut in figura 70. aqua manebit veluti suspensa: in utroque enim casu inclinatio lineæ A B cæteris paribus eadem erit.

Fig. 69.

In figura autem 69. erit linea M A eo major, quo longius est crus horizontale C D: sic ut minimæ accelerationes aut etiam retardationes observari possint, quod sæpe aliis rebus inservire potest, veluti dignoscendis accelerationibus navium, nisibusque quos exercent singulis remorum submersionibus remiges; in his tamen casibus, quia non potest status supponi durationis seu *permanentiæ*, omnis fluidi motus, qui singulis vicibus replicatur, esset inquirendus.

Facit eadem hæc ratio, ut nondum liceat omnino ex præmissis determinare, quid fieri debeat cum vasa fluidum continentia percutiuntur.

Possunt autem regulæ percussionum ex ordinariis legibus pressionum deduci, quandoquidem percussio nihil aliud sit, nisi ingens pressio parum durans.

Fig. 71. §. 22. Sit v. gr. tubus cylindricus horizontaliter situs A B C D (Fig. 71.) aqua plenus, impingatque globus P in tubi prominentiam A P: tunc aqua subito premet vehementer fundum B A versus P: ut hanc pressionem recte in-

intelligamus, ponemus primo nullum inesse pondus tubo: ita apparet ex æqualitate inter actionem & reactionem fundum durante globi impulsu non aliter impelli ab aqua, quam pelleretur in contrariam partem à globo, si hic immediate in fundum impingat. Si vero pondera aquæ & tubi rationem habere ponantur ut p ad π, diminuetur impulsus aquæ in fundum, eritque impulsus totus ad impulsum residuum ut $p + \pi$ ad p; distribuitur enim impulsus æqualiter in omnem tum aquæ tum tubi materiam, solumque fluidum in fundum reagit.

Nunc autem in fundo B A parvulum fingamus foramen m, sed per id tamen aqua liberrime fluere putetur; ita intelligimus, particulam aquæ per foraminulum m ejectum iri durante impulsu; neque tamen quantitas istius aquæ determinari poterit; pendet enim à rigiditate materiæ A P impulsum recipientis: si nempe materia ista rigidissima sit, fortior pressio substituenda est impetui, sed minus durans; consideretur v. gr. idem impetus in duobus diversis casibus: sit autem in uno pressio quadrupla, in altero duratio pressionis quadrupla, quod fieri potest cum materia rigidior est in casu priori quam posteriori: ita effluet in impulsu pressionis minoris magisque durantis dupla circiter quantitas quam in altero. Possunt hoc modo rigiditates materiarum explorari: sed possunt etiam ex sono.

HYDRO-

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO DUODECIMA.
Quæ ſtaticam fluidorum motorum, quam hydraulico-ſtaticam voco, exhibet.

§. I.

INter eos, qui preſſionis fluidorum intra vaſa ſubſiſtentium menſuras dederunt, pauci regulas Hydroſtaticæ vulgares, quas in *ſectione ſecunda* demonſtravimus, transgreſſi ſunt: multa tamen alia ſunt, quæ ad Hydroſtaticam proprie ſic dictam pertinent, veluti cum actioni gravitatis vis centrifuga conjuncta eſt, aut vis inertiæ, quod utrumque in præcedente ſectione commentati ſumus: poſſentque hujusmodi vires mortuæ excogitari & combinari infinitis aliis modis. Non vero hæc ſunt, quæ maxime deſideranda mihi videntur: cum difficile non ſit regulas ad id negotium dare generales. Deſidero potius fluidorum ſtaticam, quæ intra vaſa moventur motu progreſſivo, veluti aquarum per canales ad fontes ſalientes fluentium: multiplicis enim uſus eſt, nec ab ullo tractata aut ſi qui mentionem de illa feciſſe dici poſſunt, ab his minime rectè fuit explicata: qui enim de preſſione aquarum per aquæ ductus fluentium horumque requiſita firmitate ad preſſionem illam ſuſtinendam dixerunt, non alias, quam pro fluidis nullo motu latis leges tradiderunt.

§. 2. Singulare eſt in iſta *hydraulico-ſtatica*, quod niſus aquarum prius definiri non poſſit, quam motus recte fuerit cognitus, quæ ratio eſt, quod tam diu latuit hæc doctrina; parum enim ſolliciti hactenus fuerunt Auctores in motu aquarum diſquirendo, & velocitates ubique fere ex ſola aquæ altitudine æſtimarunt: quamvis autem ſæpe motus tam cito ad hanc velocitatem tendat, ut accelerationes ſenſibus plane diſtingui nequeant, & in inſtanti omnis motus generari videatur, intereſt tamen, ut hæ accelerationes recte intelligantur, quia aliter preſſiones aquarum fluentium definiri ſæpe non poſſunt, propetereaque exiſtimavi, rem eſſe maximi momenti à motus principio usque ad datum terminum mutationes illas utcunque *momentaneas*

omni

omni cura perpendere, experimentisque confirmare, quod passim in hoc tractatu, præsértim autem in sectione tertia, feci.

§. 3. Si ubique motus definiri posset, facile foret staticam in fluidis motis generalissimam formare: si enim foramen, sed id infinite parvum fingas, eo ipso in loco pro quo pressio aquarum desideratur, quæres primo quanta velocitate aquæ per illud foraminulum sint erupturæ & cui altitudini illa velocitas debeatur: intelligis autem huic ipsi altitudini proportionalem esse pressionem, quam quæris.

Ex hoc principio petenda est pressio quam sustinet lamina horizontalis L Q in figura quadragesima tertia, si perforata non fuerit: postquam enim demonstratum à nobis fuit in corollario secundo paragraphi trigesimi primi Sectionis octavæ, si foraminulum H infinite parvum fuerit ratione foraminum M & N: ratioque horum foraminum M & N indicetur per α & γ, fore altitudinem velocitati aquæ per H erumpentis debitam $= \frac{\alpha\alpha \times LB - \gamma\gamma \times NQ}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$, inde judicabimus nisum aquæ in laminam L Q non perforatam huic ipsi altitudini proportionalem esse: quod idem alio modo demonstratum dedimus in paragrapho decimo nono citatæ Sectionis: Hinc sequitur fieri posse, ut lamina L Q nullam pressionem patiatur, quantumvis magna supra eam fuerit altitudo aquæ, scilicet quando $\gamma = \alpha \sqrt{(LB : NQ)}$, imo pressionem in suctionem mutari posse.

§. 4. Similiter obtinetur pressio aquæ in laminam L Q, si vel hæc perforata fuerit foramine finitæ ratione amborum reliquorum magnitudinis. Si enim foraminulo infinite parvo lamina præter illud, quod est in H, perforata fuerit, non potest non velocitate communi aqua per utrumque erumpere: Et cum hæc velocitas cognita sit (per §. 30. Sect. 8.) pro foramine H, habetur quoque velocitas, qua aqua per foraminulum, quod nempe concipimus, erumpere debeat, atque sic pressionem aquæ cognoscimus. Fuerint v. gr. foramina M, H & N inter se æqualia, altitudo autem B L habuerit ad altitudinem L Q rationem ut 10 ad 3, erit pressio in laminam L Q subdecupla illius, quæ est obturatis foraminibus H & N.

Denique si in alio loco pressionem aquæ desideres, addes saltem altitudinem, qua lamina L Q supra illum locum eminet, altitudini jactus per ori-

 ficium

ficium H. Eadem methodus infervit ad preffiones aquarum in reliquis vafis, quæ in Sectione octava tractavimus, determinandas. Differunt autem omnes hæ quæftiones ab iis, quæ ad motum fluidorum per canales pertinent, quod aquæ ob infinitam vaforum à nobis pofitam amplitudinem veluti quiefcant in cavitatibus & nihilominus preffionem longe aliam exerceant, quam aliter folent. In canalibus autem aquæ preffionem fuam eo magis mutant, quo majori velocitate præterfluunt, & omnem fere confuetam preffionem exerunt, fi velocitas ifta fit valde parva.

Hæc ita, cum velocitates fluidorum determinari poffunt per methodos jam fuprà à nobis traditas. Singulari autem methodo res pertractanda eft, cum aquæ per canales fluunt, hancque doctrinam potiffimum titulo *hydraulico-ftatica* intelligo: Hic non tam preffio ex velocitate quam reciproce velocitas, fi foraminulum in lateribus canalis fiat, ex preffione definiri poteft. Et de ifta *hydraulico-ftatica*, cujus ufus ampliffimus eft, in præfenti fectione potiffimum agere conftitui.

Problema.

Fig. 72. §. 5. Fuerit vas ampliffimum ACEB (Fig. 72.) aqua conftanter plenum confervandum, tubo inftructum cylindrico & horizontali ED; fitque in extremitate tubi foramen *o* aquas velocitate uniformi emittens; quæritur preffio aquæ in latera tubi ED.

Solutio.

Sit altitudo fuperficiei aqueæ AB fupra orificium $o = a$; erit velocitas aquæ in o effluentis, fi prima fluxus momenta excipias, uniformis cenfenda & $= \sqrt{a}$, quia vas conftanter plenum confervari affumimus; pofitaque ratione amplitudinum tubi ejusque foraminis $= \frac{n}{1}$, erit velocitas aquæ in tubo $= \frac{\sqrt{a}}{n}$: Si vero omne fundum FD abeffet, foret velocitas ultima aquæ in eodem tubo $= \sqrt{a}$, quæ major eft quam a; Igitur aqua in tubo tendit ad majorem motum, nifus autem ejus ab appofito fundo FD impeditur: Ab hoc nifu & renifu comprimitur aqua, quæ ipfa compreffio coërcetur à lateribus tubi, hæcque proinde fimilem preffionem fuftinent. Apparet fic preffionem la-

laterum proportionalem esse accelerationi seu incremento velocitatis, quod aqua sit acceptura, si in instanti omne obstaculum motus evanescat, sic ut immediate in aërem ejiciatur.

Res igitur jam eo perducta est, ut si durante fluxu aquæ per o, tubus E D in temporis puncto abrumpatur in cd, quæratur quantam accelerationem guttula $acbd$ inde sit perceptura: tantam enim pressionem sentiet particula ac in lateribus tubi sumta à præterfluente aqua: Hunc in finem considerandum est vas A B E cd C, atque pro eo invenienda acceleratio particulæ aqueæ effluxui proximæ, si hæc habuerit velocitatem $\frac{\surd a}{n}$: Istud negotium fecimus generalissime in *paragrapho tertio sect. V*. Attamen quia in hoc casu particulari brevis est calculus, motum in vase decurtato A B E cd C hic iterum calculo subducemus.

Sit velocitas aquæ in tubo E d, quæ nunc ut variabilis consideranda est, $= v$: amplitudo tubi ut antea $= n$, longitudo E $c = c$: indicetur longitudo ac particulæ aqueæ infinite parvæ & effluxui proxime per dx: Erit guttula æqualis in E tubum ingressura eodem temporis puncto quo altera $acdb$ ejicitur: dum autem guttula in E, cujus massa $= ndx$, tubum ingreditur acquirit velocitatem v, atque *vim vivam* $nvvdx$, quæ *vis viva* tota fuit de novo generata; nullum enim, ob amplitudinem vasis A E infinitam, motum guttula in E habuit tubum nondum ingressa: huic *vi vivæ* $nvvdx$ addendum est incrementum *vis vivæ*, quod aqua in E b accipit, dum guttula ad effluit, nempe $2ncvdv$: aggregatum debetur *descensui actuali* guttulæ ndx per altitudinem B E seu a: habetur igitur $nvvdx + 2ncvdv = nadx$ sive $\frac{vdv}{dx} = \frac{a - vv}{2c}$.

In omni autem motu est incrementum velocitatis dv proportionale pressioni ductæ in tempusculum quod hic est $\frac{dx}{v}$: igitur in nostro casu est pressio, quam guttula ad patitur, proportionalis quantitati $\frac{vdv}{dx}$, id est, quantitati $\frac{a - vv}{2c}$.

Est vero in eo temporis puncto, quo tubus abrumpitur, $v = \frac{\surd a}{n}$ vel $vv = \frac{a}{nn}$, hic igitur valor substituendus est in expressione $\frac{a - vv}{2c}$, quæ sic

ſic abit in hanc alteram $\frac{nn-1}{2nnc}a$. Et hæc eſt quantitas, cui preſſio aquæ contra particulam tubi ac proportionalis eſt, quamcunque amplitudinem tubus habuerit, aut quocunque foramine ipſius fundum perforatum fuerit. Igitur ſi in unico caſu preſſio aquæ cognita fuerit, innoteſcet ſimul in omnibus reliquis: talem autem habemus, nempe cum foramen eſt infinite parvum aut n infinite magna ratione unitatis: tunc enim ex ſe patet, aquam exercere integram ſuam preſſionem, quæ toti altitudini a convenit, hancque preſſionem deſignabimus per a: ſed quando n eſt infinita, evaneſcit unitas præ numero nn, fitque quantitas cui preſſio eſt proportionalis $= \frac{a}{2c}$: Ergo ſi generaliter ſcire velimus, quanta ſit preſſio cum n eſt numerus qualiscunque, talis inſtituenda eſt analogia. Si quantitati $\frac{a}{2c}$ convenit preſſio a, quænam erit preſſio pro quantitate $\frac{nn-1}{2nnc}a$: Et ſic invenitur preſſio quæſita $= \frac{nn-1}{nn}a$. Q. E. I.

Corollarium 1.

§. 6. Quia litera c ex calculo abiit, ſequitur omnes partes tubi, tam eæ quæ ſunt vaſi A G propiores, quam quæ remotiores, æqualiter ab aqua præterfluente premi, & quidem minus quam partes fundi C G: differentiamque eo majorem eſſe, quo majus ſit foramen o: nullamque amplius preſſionem ſuſtinere latera tubi, ſi in hoc omnis obex F D abſit, ſic ut pleno orificio aquæ effluant.

Corollarium 2.

§. 7. Si alicubi foraminulo minimo, & quidem tali ratione foraminis o, perforetur tubus, exiliet aqua velocitate, qua ad altitudinem $\frac{nna-a}{nn}$ aſcendere poſſit, ſi modo impedimenta aliena nihil obſtent: Erit nempe altitudo jactus, in figura 73, ſeu $ln = \frac{nna-a}{nn}$. Si vero tubulus adſit verticalis, aut etiam utcunque inclinatus gm, communicans cum tubo horizontali, ſed ita tamen, ut extremitas tubuli inſerti non promineat intra cavitatem tubi horizontalis, ne aqua præterfluens illidat in illam extremitatem, erit altitudo aquæ ver-

verticalis gb in tubo inserto hærentis pariter æqualis $\frac{nna-a}{nn}$: neque necesse est in hoc posteriori casu, ut tubulus gm sit admodum strictus.

Scholium.

§. 8. Poterit ergo hæc theoria experimento confirmari facillimo, eo majoris futuro momenti, quod nemo adhuc hujusmodi æquilibria, quorum usus latissime patet, definiverit: quod eadem methodo nisus aquarum per canales fluentium generalissime obtineri possit pro aquæ ductibus utcunque inclinatis, incurvatis, amplitudinisque variatæ ac velocitate aquarum qualicunque; tum etiam, quod nonsolum hæcce pressionum, sed tota insuper motuum theoria, quam supra dedimus, hujusmodi experimentis confirmetur, quia arguunt, recte à nobis definitas fuisse accelerationes aquarum. Curandum autem est in experimento, ut tubus horizontalis sit interius bene politus, perfecte cylindricus atque horizontalis: sitque satis amplus, ut ab adhæsione aquæ ad latera tubi notabile motus decrementum oriri non possit: vas ipsum sit amplissimum atque continue plenum conservetur. Observandum quoque est, quanta sit virtus tubulo vitreo gm aquas stagnantes elevandi, quæ virtus omnibus tubis capillaribus aut admodum strictis inest: hæc enim elevatio ab altitudine gb est subtrahenda: aut potius assumendus est tubus æqualis crassitiei & obturato orificio o, notandum est punctum m, tumque fluxu aquis concesso notandum quoque est punctum b: erit autem secundum theoriam descensus $mb = \frac{1}{nn} \times a = \frac{1}{nn} \times EB$.

Tandem etiam attendendum est ad venam aquæ in o effluentis; hujus enim contractio etiam facit, ut aqua in tubo horizontali minori transfluat velocitate, quam $\frac{\sqrt{a}}{n}$. De ista contractione eamque præveniendi modo egi in Sect. IV. His autem quamvis ita occurri possit incommodis, ut error sensibilis in experimento superesse nequeat, tamen si majorem adhibere velimus accurationem, experimento indaganda erit quantitas aquæ dato tempore effluentis, quæ cum amplitudine tubi comparata rectissime dabit velocitatem aquæ intra tubum fluentis, quam in calculo posuimus $= \frac{\sqrt{a}}{n}$: Si vero experimento minor inventa fuerit, talis nempe, quæ debeatur altitudini b, tunc erit proxime pressio aquæ præterfluentis $= a - b$.

Co-

Corollarium 3.

§. 9. Si orificium in o prius digito obturetur, posteaque fluxus aquis concedatur, mutatur à primo fluxus momento pressio a in pressionem $\frac{nna - a}{nn}$: ista vero pressionum mutatio non fit in instanti; imo si accurate loquendum est, fit demum post tempus infinitum, quia, ut vidimus in sectione quinta, omnis aquarum velocitas, quanta in calculo à nobis posita fuit integræ altitudini a respondens, nunquam accurate adest: attamen incredibili acceleratione statim post primas ejectas guttulas ad hanc velocitatem tendunt, ita ut totam, quantum sensibus dijudicari potest, sine mora ulla sensibili acquisivisse videantur, nisi prælongi sint aquæ ductus, tum enim aquarum accelerationes oculis distincte dijudicari possunt, cujus rei exemplum dedi in Sect. V. §. 13. In his igitur canalibus aquas ex castello longissime sito ad fontem salientem ducentibus, si pressiones alicubi experimento explorentur eo quo supra dixi modo, invenietur pressionem celeriter quidem, nec tamen in instanti diminui, pressionumque intervalla dignoscere licebit.

Ut vero generaliter nisus aquarum definiatur, ponenda est, pro v ea velocitas, quam aqua eo ipso in loco temporisque puncto, quibus nisus desideratur, habet, sique ea velocitas convenire intelligatur altitudini b, erit nisus aquarum $= a - b$. Unde collatis cum præsentibus his quæ in sectione quinta tradita fuerunt, definire licebit quanta singulis momentis pressio futura sit.

Ex his non obscurum est prævidere leges hujusce *hydraulico-staticæ*, si & figura vasis & aquarum per canales transfluentium velocitas pro lubitu fingantur qualescunque. Erit nempe pressio aquarum constanter $= a - b$, ubi per a intelligitur altitudo debita velocitati, quacum aqua abrupto canali vaseque constanter pleno conservato post tempus infinitum effluxura sit, & per b altitudo debita velocitati, qua cum aqua actu transfluit. Mirum sane est simplicissimam hanc regulam, quam natura affectat, adhuc latere potuisse. Jam igitur illam demonstrabo expressius.

Problema.

§. 10. Invenire pressionem aquæ, per canalem utcunque formatum atque inclinatum, velocitate quacunque fluentis uniformi.

Solu-

Solutio.

Sit canalis A C D (Fig. 74.) per cujus foramen *o* transfluere ponantur aquæ velocitate uniformi & tali quæ debeatur altitudini verticali *o* S: ducatur S N & fingatur vas infinite amplum N M Q P aquis plenum usque in N P, ex quo canalis aquas suas perpetuo & æquabiliter hauriat: hæc ideo sic fingo, ut causa adsit seu vis propellens uniformis, quæ aquas data velocitate propellat seu fluxum aquarum conservet æquabilem: Et sine hac hypothesi problema nostrum foret indeterminatum, quia velocitas eadem in eodem canali infinitis modis ad temporis punctum generari potest & propterea, ut habeatur mensura causæ aquas propellentis, fingenda est uniformitas in motu aquarum. Fig. 74.

Fuerit nunc aquarum pressio definienda in C F (aut *c f*): huncque in finem putabimus rursus abrumpi canalem in C E (aut *c e*) sectione ad canalem perpendiculari examinaturi, quamnam accelerationem retardationemve guttula C E G F (vel *c e g f*) post primum rupturæ momentum receptura sit: quâ de causa generaliter motum *momentaneum* per vas decurtatum N M E C A Q P (vel N M *c e* A Q P) definiendum habemus. Sit igitur velocitas guttulæ infinite parvæ C E G F (seu *c e g f*) ipso decurtationis puncto $= v$: massa ejus $= dx$: erit *vis viva* aquæ in vase decurtato motæ proportionalis quantitati vv, eamque proinde faciemus $= \alpha vv$, intelligendo per litteram α quantitatem quamcunque constantem, quæ pendet ab amplitudinibus canalis abrupti; præcisa autem ejus determinatio hic non requiritur. Notetur *vim vivam* aquæ in vase ficto N M Q P negligi ob infinitam ejus amplitudinem: nulla tamen si vel infinitæ non esset amplitudinis inde in calculo oritura fuisset variatio. Habemus jam incrementum *vis vivæ* aquæ in vase decurtato motæ $= 2\alpha v dv$, cui si addatur *vis viva* simul genita in guttula ejecta, oritur $2\alpha v dv + vv dx$, quod est incrementum *vis vivæ* totale, debitum *descensui actuali* guttulæ dx per altitudinem verticalem aquæ supra punctum C (vel c,) quam designabimus per a: hinc igitur istud incrementum *vis vivæ* totale faciendum est æquale $a dx$, sic ut sit

$$2\alpha v dv + vv dx = a dx \text{ vel}$$

$$\frac{v dv}{dx} = \frac{a - vv}{2\alpha}.$$

Reliqua si fiant, ut in paragrapho quinto & ponatur velocitas v talis quæ debeatur altitudini b, invenietur pressionem aquæ in C F (aut cf) tantam esse,

esse, quanta in aqua stagnante ad altitudinem $a-b$. Ubi notari potest esse altitudinem b ad altitudinem oS, si nulla motus impedimenta aliena sint, venaque effluens in o non contrahatur, in ratione quadrata foraminis o & sectionis CE (aut ce).

Corollarium.

§. 11. Cùm b major est quam a, fit quantitas $a-b$ negativa atque sic pressio in suctionem mutatur, id est, latera canalis introrsum premuntur: tunc autem res ita consideranda est, ac si loco columnæ aqueæ CT superincumbentis & in æquilibrio positæ cum aqua præterfluente, sit columna aquea appensa ct, cujus nisus descendendi impediatur ab attractione aquæ præterfluentis: veluti si v. gr. amplitudo canalis ce æqualis sit orificio o, tunc erit $b = oS$, nulla habita ratione motus impedimentorum *accidentalium*: hinc si tubulus ex canali descendat cr, hicque sit aqua plenus à sua origine c usque in punctum t cum orificio o ad libellam positum, manebit aqua ct suspensa sine motu: si verò punctum t infra o positum sit, descendet aqua per tubulum cr, & effluet perpetuo in r, neque tamen ut facile quis existimare potuisset nondum hâc visa theoria, velocitas aquæ in r effluentis talis erit, quæ debeatur altitudini NP supra r, etiamsi omnia impedimenta auferantur, respondebit potius hæc velocitas, si modo tubulus admodum strictus sit ratione canalis, altitudini tr. Si punctum t altius positum sit puncto o, aqua sua sponte ascendet & cum omnis canalem ingressa erit, aër per tubulum attrahetur, moxque vena aquea in o effluens ab admixto aëre turbabitur pelluciditate atque soliditate orbata. Apparet igitur, quando pressio futura sit affirmativa & quando negativa: nempe eo major est in tubo pressio, quo amplior est & quo humilius positus: Altitudo b est quidem in theoria $= \frac{1}{nn} \times oS$, si $\frac{1}{n}$ denotet rationem inter amplitudinem orificii & ejus tubi sectionis, pro qua pressio est definienda. Cum vero obstacula notabiliter diminuunt motum, conveniet potius in æstimandis pressionibus, ut velocitas aquæ, qualis actu est, experimento cognoscatur & altitudo illi velocitati debita pro b substituatur: similiter accuratius æstimabitur pressio, si pro a non tam ponatur altitudo superficiei aquæ NP supra effluxus locum, quam altitudo velocitatis, quacum aquæ actu effluant ex canali eodem in loco abrupto: Hæ tamen correctiones non semper locum habent: Istam vero theoriam generalem jam exemplis quibusdam illustrabo.

Exem-

Exemplum 1.

§. 12. Sit vas A B F G (Fig. 75.) ex cujus fundi medio descendit tubus D E formam habens coni truncati inferiora versus divergentis: Affundantur perpetuo aquæ in A G, ita ut sic vas plenum conservetur. Fig. 75.

Sit autem altitudo superficiei aqueæ supra orificium E $= a$, & supra D (qui locus est pro quo pressio aquæ quæritur) $= c$: amplitudo orificii in E $= m$; & amplitudo seu sectio horizontalis in D $= n$. Erit pressio aquæ in D $= c - \frac{mm}{nn} a$, quæ quantitas vi hypothesium est negativa, sic ut latera canalis introrsum premantur à columna aquea altitudinis $\frac{mm}{nn} a - c$.

Igitur si concipiatur tubus incurvus D L N alteri D E insertus, erit aqua præterfluens in D in æquilibrio cum aqua D L N, quando altitudo D supra N est $= \frac{mm}{nn} a - c$. Si altitudo hæc minor est, sua sponte aqua ascendet nec ascendere desinet, quamdiu aquis orificium N submersum est, ita ut sic aquæ ex loco humiliori in sublimiorem sine ulla vi externa elevari possint, si in A G aquæ sufficiente copia affluant. At vero cum altitudo verticalis D supra N major est quam $\frac{mm}{nn} a - c$, ascendet aqua in crure L N, donec illi fuerit æqualis.

Cæterum hic in memoriam revocandum est, quod passim monui experientiam docere, nempe multum abesse quominus aquæ per tubos à vase, cui implantati sunt, divergentes tota sua velocitate, quam vi theoriæ obtinere deberent, effluant; cujus rei rationes indicavi *paragrapho 26. Sect. 3.*

Fit inde ut altitudo D supra N admodum minor sit, quam vi theoriæ exposita esse deberet: Error corrigetur si loco $\frac{mm}{nn} a$ ponatur altitudo velocitatis, quam aqua in D habet; quæ altitudo per experimentum de quantitate aquæ dato tempore effluentis sumtum obtinetur.

Exemplum 2.

§. 13. Si simili vasi appensus sit tubus verticalis, qualis repræsentatur in Fig. 76. per C E, in quo amplitudines ubique rationem habeant inversam Fig. 76.

sub-

ſubduplicatam altitudinum aquæ ſuperincumbentis, tubus iſte nihil afficitur ab aqua præterfluente, neque ullibi vel preſſionem ſive ſuctionem ſuſtinet.

Sequitur inde figuram naturalem fili aquei verticalis, quamdiu hoc contiguum eſt, eandem eſſe, quæ tubi CFE, quod & ratio & experientia confirmat: filum autem eo citius attenuabitur quo minor eſt altitudo ſuperficiei aqueæ ſupra orificium C, ſeu quo tardius effluunt aquæ: apparet filum aqueum ejus eſſe indolis, ut eadem aquæ quantitas per ſingulas ſectiones transfluat, nec velocitas ullibi mutetur, ubicunque filum abrumpatur, quæ eadem proprietas etiam in tubum CFE cadit, adeo ut rectiſſime hæc inter ſe conveniant.

Exemplum 3.

§. 14. Devehantur aquæ è caſtello per canalem, in cujus fundum foramen ſit per quod aquæ veluti in fonte ſaliente verticaliter exiliant, dico preſſionem aquæ in ſingula canalis puncta ubique æqualem fore, ſi amplitudines ejus ſint reſpective ut $\sqrt{\frac{a}{x-b}}$, ubi a exprimit altitudinem aquæ in caſtello ſupra orificium effluxus; x altitudinem ejuſdem aquæ ſupra locum ad libitum in canali ſumtum & b altitudinem arbitrariam conſtantem, & tunc fore ubique preſſionem aquæ fluentis ad preſſionem aquæ ſtagnantis ut b ad a. Quia vero cæteris paribus canales ampliores minus rupturæ reſiſtunt quam ſtrictiores, & id quidem in ratione radiorum ſeu quia conatus aquæ ad canalem rumpendum cæteris paribus rationem ſequitur ſubduplicatam amplitudinum, patet canalem idem rupturæ periculum in ſingulis locis ſubiturum eſſe, ſi amplitudo (y) ratione orificii aquas ejicientis (1) ubique ſequatur legem hujus æquationis

$$\left(x-\frac{a}{yy}\right)\sqrt{y}=b \text{ vel}$$

$$xxy^4-bby^3-2axyy+aa=0.$$

In canali per totum ſuum tractum æquabilis amplitudinis aquarum niſus ad rumpendum canalem ubique proportionalis erit firmitati canalis, ſi craſſities laterum canalis rationem ſequatur ut $x-\frac{a}{mm}$, intellecta per m amplitudine canalis ratione orificii (1).

Exem-

Exemplum 4.

§. 15. Fieri poteſt, ut altitudo ſuperficiei aqueæ ratione loci, pro quo preſſio indaganda eſt, ſit negativa, veluti in ſiphonibus recurvis aquas ex vaſe uno in aliud humilius poſitum ducentibus: Tuncque preſſio fit duplici titulo negativa, nempe $= -a - b$, denotante a altitudinem loci ſupra ſuperficiem aquæ & b altitudinem velocitati aquæ in illo loco debitam.

Iſta vero ſufficient, ut puto, ad recte intelligendam fluidorum motorum ſtaticam: Venio jam ad alia quædam phænomena, quorum ſolutio ab iſtis, quas dedimus modo, regulis pendet.

§. 16. In Sectione tertia §. 25. mentionem feci cohæſionis aquæ per tubos fluentis: veras autem iſtius cohæſionis menſuras ubique definire res eſt, quæ ſine iſta præmiſſa *hydraulico-ſtatica* expediri nequit: neque enim altitudines conſideraſſe verticales ſupra orificium effluxus ſufficit, ut vulgo putatur, ſed oportet etiam noſſe velocitates aquis convenientes, hæque cognoſcuntur ex amplitudinibus. Ut vero ſtatim appareat lex generalis in definienda vi cohæſionis ſeu conatu, quo fluida ad mutuam ſeparationem ſolicitantur, dico illam vim cohæſionis æqualem eſſe vi, qua latera canalis introrſum premuntur, quam definivimus §. 10. Propoſitio hæc alia demonſtratione egere mihi non videtur; prouti enim compreſſio aquæ, ſeu vis quâ ejus partes ad ſe invicem comprimuntur, æqualis eſt ſuperincumbenti columnæ aqueæ ſtagnanti, ita viciſſim conatus fluida ſeparandi æqualis cenſendus eſt appenſæ columnæ verticali aqueæ ſtagnanti, quæ cum aquis præterfluentibus in æquilibrio ſit. Exemplorum loco eadem accipiemus, quibus ſupra pro indicandis aquarum preſſionibus negativis uſi ſumus.

(I) In Figura ſeptuageſima quinta §. 12. explicata, ſi in tubulo DLN altitudo D ſupra N talis ſit, ut aqua in eo ſtagnans cum aquis in D præterfluentibus in æquilibrio ſit, tanta debet eſſe vis cohæſionis in D, ne aqua ibidem diſcerpatur, quantam habet pondus columnæ aqueæ ſimilis baſis & altitudinis verticalis DN. Inde intelligitur quod dixi §. 25. Sect. 3. *poſſe longitudinem tubi ita augeri, ut tandem aquæ deſinant eſſe continuæ in tubo, quin potius in columnas dividantur, idque fieri in tubis cylindricis cum infra triginta*

ginta duos pedes descendant; in tubis divergentibus autem minorem descensum requiri: ita si v. gr. orificium inferius duplo majus fuerit orificio superiori in castellum hiante non posse tubos infra octo pedes descendere, quin periculum adsit aquarum dissolutionis. In his tamen exemplis theoretice consideratis aquæ omni sua velocitate sine diminutione motus effluere ponuntur.

(II.) Ex eadem ratione patet, si tubi inferiora versus convergant, tunc illos majorem quam 32. *ped.* admittere descensum: imo sine fine tubum continuari posse in casu Figuræ 76. §. 13. explicatæ, ut & infinitis aliis modis.

(III) Si vero altitudo superficiei aqueæ in castello ratione loci propositi negativa fuerit, veluti fit, cum aquæ trans montem vehendæ sunt, nunquam poterit quomodocunque res instituatur, altitudo excedere triginta duos pedes, quod patet ex §. 15. Si enim aquæ vel plane infinitè parva transfluant velocitate, vis cohæsionis jam requiritur, quæ sit æqualis toti columnæ aqueæ, atque major vis requiritur, si notabili velocitate transfluxerint. Hinc remedia ab aliquibus Scriptoribus allata vana puto: scio quidem sine alio artificio aquas sæpe suspensas hærere ultra altitudinem 32. pedum, & Mercurium ultra 30. pollices; sed is effectus incertus est nec sibi constans. Quidam etiam affirmant fluxum aquarum per siphones recurvos fieri in vacuo: an vero vacuum tale fuerit, ut ne sexagesima quidem aëris pars in recipiente remanserit, & num altitudo tubi plus quam dimidio pede superficiem aquæ hauriendæ excesserit ignoro. Sic igitur, quæ de subsecutura aquarum solutione dixi, non aliter quam hypothetice dicta velim considerentur. Sufficiet quod accurate determinaverim quanta vi aquæ ad separationem mutuam urgeantur.

§. 17. Sunt porro alia naturæ phænomena, quorum vera explicatio ab ista theoria *hydraulico-statica* pendet: veluti quod fumus per caminum ascendens aërem per foramen in camino factum magno post se trahat impetu: quod ventus ex loco angustiori in apertiorem flans aliquid de sua elasticitate perdat, prouti id colligitur ex eo, quod fenestræ apertæ ab aëre, è camera egressum ob majorem suam elasticitatem, tentante claudantur; & hujusmodi alia, quæ examinare singula non licet.

Possunt fluidorum motorum pressiones quidem infinitis variari modis; puto tamen omnia ad principia nostra reduci posse: duas istius theoriæ exami-

navi-

navimus ſpecies; primam deduxi ex cognito motu, quem fluidum habiturum ſit, ſi in loco determinandæ preſſionis foraminulo infinite parvo vas perforetur: alteram *à priori*, ut dicunt, ex theoria noſtra generali deduxi; ſæpe utraque ſimul locum obtinet, ut altera alterius opem requirat, & tunc alia oritur preſſionum æſtimatio, quam unico indicabo exemplo.

§. 18. Putemus in vaſe, quod figura 72. ſiſtit, tubum horizontalem nonſolum in extremitate, ſed & in ſua inſertione E G laminam habere in plano verticali in medio perforatam, manentibus cæteris poſitionibus *§*. 5. indicatis: aliam patientur preſſionem latera tubi E D à transfluente aquâ, quam nulla appoſita lamina E G & quidem minorem, quamvis minori velocitate transfluant. Ut preſſio hæc accurate definiatur, via calcanda eſt eadem, quæ in citato paragrapho quinto: nempe ante omnia quærenda eſt velocitas, quâ aquæ in tubo E D transfluunt, poſtquam hæc jam uniformis facta eſt. Deinde etiam inquirendum eſt in valorem $\frac{v\,dv}{dx}$, ſi tubus alicubi abrumpi ponatur.

Quomodo autem hoc inveniri poſſit, res eſt quæ potiſſimum pertinet ad ſectionem octavam, adhibitis ſimul cautelis §. 14. *ſectionis ſeptimæ*: In ſectione octava generaliter oſtenditur motus fluidorum per plura foramina transfluentium & in §. 14. *ſect.* 7. in ſpecie monſtratur, quomodo æſtimandus ſit *aſcenſus potentialis*, qui in guttulis generatur, quando hæ per foramen, non in aquam veluti ſtagnantem, ſed in aquam motu, qui negligi nequit, latam influit.

Si recte indicatis hiſce inſiſtas veſtigiis, reperies velocitatem, quacum aqua uniformiter per tubum E D transfluit, convenire huic altitudini

$$\frac{mmppa}{mmnn + nnpp - mmpp},$$

ubi per m, p, & n indicantur *reſpective* amplitudines foraminum in laminis E G & F D factorum ut & tubi E D: per a autem intelligitur altitudo aquæ ſupra tubum E D horizontaliter poſitum.

Si porro tubum abrumpi ponas in cd, guttulamque ad velocitate moveri v ſeu altitudinem huic velocitati debitam $= vv$, ſimulque longitudinem E c indices per c, longitudinem minimam ac per dx: æquationem invenies hanc

 $2cvdv +$

$$2cvdv + \frac{nn}{mm} vvdx = adx, \text{ five}$$
$$\frac{vdv}{dx} = \frac{mma - nnvv}{2mmc};$$

ſtubſtituatur nunc pro vv valor modo indicatus $\frac{mmppa}{mmnn + nnpp - mmpp}$, & erit

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{mmnn - mmpp}{2c(mmnn + nnpp - mmpp)} a,$$

cui preſſio quæſita eſt proportionalis. Sed ſi amplitudo orificii extremi indicata per p eſt veluti infinite parva, preſſio fit $= a$; Igitur eſt generaliter preſſio quæſita vi paragraphi quinti æqualis

$$\frac{mmnn - mmpp}{mmnn + nnpp - mmpp} \cdot a.$$

§. 19. Si amplitudo tubi n eſt veluti infinita ratione amplitudinum in laminarum foraminibus, fit preſſio $= \frac{mma}{mm+pp}$: & tanta etiam eſt altitudo, ad quam aqua in o effluens velocitate ſua aſcendere poteſt: id igitur conforme cum *paragrapho quarto ſectionis octavæ*, quia figura vaſis ceu ubique infinitæ amplitudinis non differre facit velocitatem aquæ exilientis.

Cum nulla eſt lamina in F, fit $p = n$, totaque preſſio evaneſcit. Notari id meretur, quia rationem oſtendit, cur in tubis divergentibus ſuctio tanta non ſit, quanta vi hypotheſeos, qua omnis *vis viva* conſervari ponitur, eſſe deberet: In præſenti enim caſu rationem habuimus illius *vis vivæ*, quæ continue abſumitur. Ita quoque nullam preſſionem patiuntur latera tubi, cum lamina quæ eſt in E G foramen veluti infinite minus, illo, quod eſt in F D, habet. Denique notari id quoque meretur, quod quamvis fluida per canales nullis laminis inſtructos mota generaliter affectent preſſionem, quæ reſpondeat differentiæ altitudinum illis velocitatibus debitarum, qua fluidum effluat poſt tempus infinitum per canalem abruptum & qua actu transfluit per canalem non abruptum, hanc legem tamen in præſenti caſu minime valere, ad quod animum attendere velim hos, qui viſa theoria noſtra *hydraulico-ſtatica*, propoſitionem generalem §. 10. ſynthetice demonſtrare volent. Erunt enim fortaſſe, quibus res hæc ita per ſe obvia videbitur, ut vix demonſtranda ſit: hos autem, ſi qui futuri ſint, ex falſa quadam veriſimilitudine ſibimet imponere, oſtendunt hujus modi leges particulares, quæ in *hydraulico-ſtatica* occurrunt.

§. 20.

§. 20. E re erit de his quoque, quæ §. 18. dicta ſunt, experimenta ſumere, tum pro velocitate aquarum in o effluentium, tum pro preſſione; inde enim præter preſſionum leges confirmabitur etiam illa accelerationum theoria, quæ obtinet, cum continue pars quædam *vis viva* inutiliter abſumitur, quod argumentum in ſectione octava præſertim pertractavimus; In experimento autem ſumendo evitentur, quantum fieri poteſt, impedimenta, quorum jam ſæpe mentionem fecimus.

§. 21. Adjiciam hic quæſtionem quæ quidem non ad ſtaticam fluidorum pertinet, ſed ad hydraulicam ſeu motum fluidorum, quæ vero ſine iſtis præmiſſis regulis *hydraulico-ſtaticis* ſolvi nequit. Quæritur in figura ſeptuageſima ſecunda (nullam hic amplius in E G laminam conſidero) ſi tubus foramine in ac perforetur finitam rationem habente tum ad amplitudinem tubi tum ad amplitudinem foraminis o, motusque aquarum jam uniformis factus fuerit, quæritur, inquam, quanta velocitate aquæ per utramque aperturam erupturæ ſint.

Sit jam rurſus altitudo B E $= a$, amplitudo tubi $= n$ amplitudo orificii in $o = p$: amplitudo foraminis $ac = m$: velocitas aquæ per o effluentis $= v$: Erit velocitas aquæ quæ foramen ac præterfluit $= \frac{p}{n} v$. Igitur ibidem in latera tubi exercet preſſionem, quæ eſt $= a - \frac{ppvv}{nn}$ (per §. 5.) & propterea ſuppono proxime fore tantam quoque altitudinem, quæ generare poſſit velocitatem, qua aqua per foramen ac exilit: ipſam vero hanc velocitatem eſſe $= \surd\left(a - \frac{ppvv}{nn}\right)$. Hoc poſito erunt velocitates in foraminibus o & ac ut v ad $\surd\left(a - \frac{ppvv}{nn}\right)$: ſicque quælibet guttula tubum in G E ingrediens, cum pervenit ad regionem primi foraminis, in duas diſpeſcitur partes, quarum altera per ac, altera per o effluit: ſuntque hæ partes reſpective, ut velocitates, quibus fit effluxus utrobique ductæ in amplitudines foraminum. Igitur ſi maſſa guttulæ integræ G E dicatur g, erit pars ejus per ac effluens æqualis

$$gm\surd\left(a - \frac{ppvv}{nn}\right) : \left[pv + m\surd\left(a - \frac{ppvv}{nn}\right)\right]$$

& pars altera per o effluens $=$

gpv :

$$gpv : \left[pv + m\sqrt{\left(a - \frac{ppvv}{nn} \right)} \right].$$

Si hæ partes multiplicentur *respective* per quadrata ſuarum velocitatum, habebuntur earundem *vires vivæ*, quarum aggregatum æquandum eſt cum $g \times a$, id eſt, cum *deſcenſu actuali* guttulæ g per altitudinem a. Sic obtinetur talis æquatio, ſi reducatur

$$n^3 vv - n^3 a = mpv\sqrt{(nna - ppvv)} \text{ ſive}$$

$$vv = \frac{2n^6 + mmnnpp + nnmp\sqrt{4n^4 + mmpp - 4nnpp)}}{2n^6 + 2mmp^4.} a,$$

hæcque quantitas exprimit altitudinem pro velocitate aquæ in o effluentis, qua cognita habetur quoque altitudo ſimilis pro altero foramine ac, quæ nempe eſt $= a - \frac{ppvv}{nn}$.

§. 22. Si $p = n$, fit $vv = a$; ergo tunc aquæ tota velocitate exiliunt ſolita per foramen o, & per alterum foramen ac nihil effluit. In utroque porro foramine velocitas reſpondet integræ altitudini a, ſi p eſt veluti infinite parva: Si vero m eſt infinite parva, fit quidem $vv = a$, ſed altitudo velocitatis pro foraminulo ac eſt $= a - \frac{pp}{nn}a$, ut §. 7. jam indicatum fuit: Si $m = p$, fit $vv = \frac{n^4 a}{n^4 - nnpp + p^4}$; & $a - \frac{ppvv}{nn} = \frac{(nn - pp)^2 a}{n^4 - nnpp + p^4}$.

Denique obſervari poteſt, aquas per foramen o ſemper majori velocitate ejici, quam quæ altitudini a reſpondet, quod utique fit, quia aquæ in E d veluti impetum faciunt in aquas d F.

Interim quamvis omnia hæc Corollaria egregie cum indole argumenti conſentiunt, non poteſt tamen ſolutio iſtius problematis aliter quam proxime vera cenſeri.

EXPE-

EXPERIMENTA
Hydraulico-ſtatica pro Sectione XII.

Ad §. §. 3. & 4.

PReſſiones, quæ dictis expoſitæ fuerunt paragraphis, facili experimento confirmari poterunt, ſi vas, quale figura quadrageſima tertia ſiſtit, quodque §. 30. *ſect.* 8. deſcribitur, confici curetur, ejusdemque laminæ L Q tubus vitreus verticaliter implantetur, cujus orificium utrumque apertum ſit: obſervabitur ſic obturatis foraminibus H & N totoque ſyſtemate aquis repleto, aquam in tubo vitreo ad libellam A B aſcendere, aut illam propter naturam tubulorum capillarium tranſcendere. Dein autem ſi digitus ab orificio N removeatur, obſervabitur, aquam in tubo vitreo deſcendere & captis menſuris, invenietur, ni fallor, altitudinem aquæ in tubo vitreo reſiduam (detracta altitudine virtuti tuborum capillarium debita) eſſe $= \frac{\alpha\alpha \times LB - \gamma\gamma \times NQ}{\alpha\alpha + \gamma\gamma}$, uti dictum eſt §. 3. ubi denominationes harum litterarum explicantur.

Si porro ab utroque orificio H & N digitus removeatur, tunc erit eadem altitudo aquæ in tubo vitreo reſidua talis, quæ §. 4. indicatur. Similiter poteſt tubus vitreus laminæ Q N inſeri, isque deinde inflecti, ut cognoſci poſſit, an preſſiones quoque in lamina Q N recte definitæ fuerint.

Experimenta vero quæ ad preſſiones aquarum per tubos latarum pertinent ipſemet coram Societate noſtra inſtitui & deſcripta ſunt in tom. IV. Commentariorum *pag.* 194. Illa igitur, ut ibi deſcripta ſunt, hic allegabo.

„ Uſus ſum arca lignea, cujus latitudo erat unius pedis, longitudo trium „ pedum, altitudo 14. pollicum. Hanc aqua implevi ejuſque parti infimæ „ fiſtulam accurate cylindricam ex ferro fabricatam infixi horizontaliter. Ita „ autem factus erat tubus iſte ferreus: longitudinem nempe habuit A B „ (Fig. 77.) 4. poll. 2. lin. Angl. diametrum B C 7. lin. in medio tubus Fig. 77. „ foraminulo *m* erat perforatus, ibidemque tubulus D E pariter ferreus ſex li- 78 & 79. „ neas longus ac ſesquilineam in diametro habens afferruminatus erat, ita ut

„ foraminulum *m* in medio basis foveret : Huic postmodum tubulo imposui „ tubum vitreum aquabilis amplitudinis, ut apparet in figura 79. quæ modum „ totius experimenti indicat. Porro tria opercula confieri curavi tubo fer„ reo adaptata, foramine diversæ magnitudinis pertusa : tale operculum repræ„ sentatur Figura 78.

„ Hisce omnibus conjunctis eum in modum, quem ostendit figura 79, „ factoque, ne aqua per alias rimas, quam per aperturam in B C efflueret, ob„ turavi orificium in B C, tumque observavi in tubo vitreo verticaciter posi„ to punctum *n*, ad quod aquæ ascendebant, idque filo ferico circumvolu„ to notavi : prius autem exploraveram virtutem capillarem istius tubi vitrei, „ hancque inveneram quinque linearum, ita ut tubo aquæ verticaliter immis„ so differentia inter utramque aquæ superficiem esset quinque linearum: „ propterea punctum *n* supra superficiem E F elevatum fuit totidem lineis, „ hincque in calculo quævis altitudo D *n*, D *g*, quinque lineis diminuta cen„ senda est.

„ In singulis experimentis arca aquis ita plena conservata fuit, ut alti„ tudo A F esset 9. *poll.* 7. *lin.* altitudo autem D *n* 10. *poll.* His omnibus ita „ ad experimentum præparatis, tunc aperto orificio in B C aquis effluxus „ concedebatur & protinus descendit aqua in tubo vitreo, veluti ex *n* in *g*, quem „ locum *g* rursus alio filo ferico antea tubo circumvoluto notavi. Et sic de„ nique talia cepimus experimenta quæ respondent §. 5. & seqq.

Experimentum 1.

„ Cum diameter foraminis in operculo B C esset $2\frac{1}{5}$ *lin.* fuit descensus „ *n g* tantillo major una linea, ita ut nulla differentia inter theoriam & succes„ sum experimenti observari potuerit.

Experimentum 2.

„ Assumto alio operculo, in quo diameter foraminis erat $3\frac{2}{5}$ *lin.* aut paul„ lulum major, descensus *n g* observatus fuit sex linearum cum duabus ter„ tiis, plane rursus, ut theoria indicat.

Experi-

Experimentum 3.

„ Adhibito tertio operculo, in quo diameter foraminis erat 5. *lin.* aut „ aliquantulum minor, descensum *n g* observavimus 28. *lin.* Vi theoriæ de„ bebat esse circiter 29. *lin.* nec enim foramen omnino quinque lineas in dia„ metro habere visum fuit. Differentia parvula tribuenda est impedimentis, „ quæ aqua in transfluxu per fistulam patitur, majoribus quam in præceden„ tibus experimentis, ob auctum motum intra fistulam.

Experimentum 4.

„ Denique nullo apposito operculo aquas pleno orificio effluere sivi„ mus, tuncque omnis fere aqua è tubo vitreo egressa fuit: pars tamen ali„ qua remansit, quam deprehendimus octo lineas altam: Earum autem quin„ que tribuendæ sunt virtuti tubi capillaris, tres reliquæ debentur impedimen„ tis, quæ aqua in transfluxu à D usque ad B offendit.

„ Sic igitur experimenta ad amussim cum theoria conveniunt: Inde „ autem non difficile est prævidere, fieri posse, ut latera fistulæ non solum „ non premantur versus exteriora, sed & ut versus axem fistulæ introrsum „ comprimantur (confer. §. 11.). Id autem edoctus sum hoc alio experi„ mento.

Experimentum 5.

„ Loco tubi cylindrici AB adhibui conicum, cujus orificium exter„ num erat majus orificio interno, simulque usus sum tubo vitreo incurvato, „ qualem ostendit Figura 80. Et cum ante fluxum aqua hæsit in tubo vitreo Fig. 80. „ in *n*, descendit in eodem tubo aqua usque in *g*, cum aquæ effluerent per tu„ bum conicum: fuitque punctum *g* infra D, indicio compressum fuisse du„ rante fluxu tubum conicum. In his autem casibus impedimenta motus sunt „ insignia, quæ faciunt ut velocitates aquæ in orificio externo admodum „ minores sint, quam quæ respondent altitudini aquæ: hancque ob rationem „ altitudo puncti D supra *g* tanta non fuit, quanta alias futura fuisset, fuit ta„ men aliqua. Similem effectum alio obtinui modo, sed admodum notabi„ liorem (confer. §. 12.). Experimentum hoc alterum subsequente anno coram „ Academicis institui, præsente Serenissimo Portugaliæ Principe Emanuele.

Experimentum 6.

Fig. 81. „ In Figura 81. repræſentat ACFB cylindrum, in cujus fundo implantatus erat tubus conicus DGHE; hicque ad latus habuit parvulum tubulum in *l*, qui reciperet extremitatem tubi vitrei incurvati *lmn*; altitudo „ CA erat 3. *poll.* 10. *lin.* E *l* 4. *lin.* *l* H 2. *poll.* 9½. *lin.* amplitudo tubi conici in *l* „ erat ad amplitudinem orificii GH ut 16. ad 16. *ln* erat 5. *poll.* 6. *lin.* ejuſque „ orificium *n* erat aquæ in vaſculo M ſubmerſum.

„ Appoſito digito orificio GH impletoque vaſe ſtillabat aqua per tubum vitreum *lmn* in vas M: remoto autem digito & effluentibus jam aquis „ per GH, motu reciproco aqua ſponte ex vaſculo M aſcendit per tubum „ *nml*, & una cum reliquis effluxit per GH, donec totum vaſculum M evacuatum eſſet. Affundebantur autem ſuperius continue aquæ, ut vas plenum „ conſervaretur. Si digito pars orificii GH obtegebatur, facile erat efficere ut „ pro lubitu aquæ in tubo vitreo *lmn* ſurſum deorſumve moverentur.

Si quis etiam experimentis explorare voluerit, num theoria cum problemate §. 18. conveniat, non male operam ſuam collocaverit, quandoquidem non ſolum ſic novam hanc noſtram *hydraulico-ſtaticam*, ſed & theoriam *Sect.* 8. novam pariter & à nemine tractatam egregio exemplo eoque faciliimo illuſtraverit.

Hiſce jam in chartam conjectis ipſe experimenta ſumſi, quorum modo mentionem feci: Machina ad id uſus ſum eadem, quam modo deſcripſi, quæque Figura 79. repræſentatur: ſed inſuper, ut natura rei poſtulat, in A tubo aliud operculum impoſui: eratque altitudo aquæ AF 8. *poll. Lond.* diameter tubi ferrei AC rurſus 7. *lin.* Operculis quoque iiſdem uſus ſum, quibus ante: In quovis autem experimento deſcenſum obſervavi, quem ſuperficies *n* fecit, cum digitus ab operculo BC removeretur: ſimul autem menſura capta altitudinis verticalis orificii C ſupra pavimentum obſervavi diſtantiam iſtius lineæ verticalis à loco, in quem vena aquea incidebat. Hanc diſtantiam vocabo *amplitudinem jactus*: altitudo autem hæc verticalis erat in ſingulis experimentis 19. *poll.* His ita præparatis experimenta feci talia.

Experi-

Experimentum 7.

Cum diameter orificii interioris operculi esset $2\frac{1}{5}$. *lin.* & diameter orificii exterioris orificii $3\frac{2}{5}$. *lin.* fuit descensus *ng* paullo minor, quam 7. *poll. amplitudo jactus* 9. *poll.* In theoria autem §. 18. exposita, indicatur descensus *ng* 6. *poll.* 10. *lin.* & *amplitudo jactus* $9\frac{1}{2}$. *poll.*

Experimentum 8.

Deinde fuit diameter orificii interni 5. *lin.* & diameter alterius orificii $3\frac{2}{5}$. *lin.* fuit descensus *ng* fere 17. *lin.* & *amplitudo jactus* 24. *poll.* In theoria est *ng* $17\frac{1}{4}$. *lin.* & *amplitudo jactus* 23. *poll.*

Experimentum 9.

Porro cum esset diameter orificii interni $3\frac{2}{5}$. *lin.* & diameter orificii exterioris 5. *lin.* fuit descensus *ng* fere idem, qui in experimento 7. nempe circiter 7. *poll.* Verum *amplitudo jactus* fuit major, scilicet 11. *poll.* In theoria est *ng* 6. *poll.* 11. *lin.* & *amplitudo jactus* fere 11. *poll.*

Experimentum 10.

Denique existente diametro orificii interioris $3\frac{2}{5}$. *lin.* & diametro orificii exterioris $2\frac{1}{5}$. *lin.* fuit descensus *ng* circiter unius pollicis atque *amplitudo jactus* 23. *poll.* In theoria est *ng* = 14. *lin.* & *amplitudo jactus* = $22\frac{1}{2}$. *poll.*

Omnia profecto hæc experimenta egregiè cum theoria conveniunt; fortasse major consensus futurus fuisset, si majori accuratione foraminum mensuras accipere licuisset; nemo tamen, ut puto, minimis istis numerorum differentiis offendetur. Oriuntur autem maximè à compressione aquæ in AC, quæ producitur, dum guttulæ per orificium interius canalem ingredientes partem motus amittunt, hinc amplitudo jactus tantillo major & descensus *ng* minor sunt in theoria quam in experimentis, nolui hujus rei mensuram adjicere, quamvis id in potestate fuisset, ne calculus fierit intricatior.

HYDRODYNAMICÆ
SECTIO DECIMA TERTIA.
De reactione fluidorum ex vasis effluentium eorundemque, postquam effluxerunt, impetu in plana quibus occurrunt.

§. I.

AQuæ dum ex vase ejiciuntur simili agunt modo in vas, ex quo effluunt, quo globus in tormentum bellicum aut sclopetum, ex quo exploditur: vas nempe retropellunt: & id quidem jam annotavit Newtonus in *princ. Math. phil. nat. edit. prim. p.* 332. recteque inde deducit ascensum pilarum, quæ pulvere pyrio, carbone temperato implentur; materia enim inflammata, dum per foramen paullatim expirat, pilas in altum projicit.

Sed nec satis generaliter pro rei momento argumentum pertractavit citatus auctor (cum id ex ipsius instituto non erat) nec veram rei mensuram dedit. Imo in duabus editionibus posterioribus id prorsus silentio præteriit: putavit autem *vim illam repulsionis esse æqualem ponderi cylindri aquei, cujus basis sit orificium aquas transmittens & cujus altitudo sit æqualis altitudini superficiei aqueæ supra foramen.* Recte quidem hæc mensura deducitur ex opinione, quam tunc temporis fovebat Newtonus, circa velocitatem aquæ ex vase effluentis, dum statueret aquam ad dimidiam superficiei altitudinem sua velocitate ascendere posse.

Prouti autem hujus propositionis falsitas nemini amplius nunc ignota est, ita & alterius defectum inde quivis facile colliget, quamvis prima fronte satis verisimilis.

§. 2. Considerabimus primo rem in casu simplicissimo, quo nempe aquas ex vase infinitæ amplitudinis horizontaliter effluere ponemus. Habeo autem demonstratum repulsionis vim non statim à fluxus initio totam adesse, nisi quatenus & ipsa velocitas in aquis effluentibus tota adsit, ita ut si vas non

A sit

sit infinitæ amplitudinis, vis repulsionis una cum velocitate aquarum effluentium sensim sensimque crescat, aut etiam decrescat pro circumstantiarum natura: Ab his autem mutationibus momentaneis animum primo abstrahemus, fluxum ex vase infinito fieri æquabilem ponendo. Atque sic optime definietur vis repulsionis, si inquiratur, quænam sit vis ad motum producendum requisita: Hunc vero in finem non solum ad velocitatem aquæ effluentis, sed & ad illius quantitatem erit respiciendum; quantitas autem pendet partim à magnitudine orificii, partim à contractione venæ, quæ posterior variabilis est: Vidimus quidem in *Sect. IV.* posse totam evitari; si tamen quædam sit, erit Sectio venæ maxime contractæ sive attenuatæ ceu orificium considerandum & tunc dico fore *vim repulsionis æqualem ponderi cylindri aquei, cujus basis sit orificium aquas transmittens* (id est, Sectio venæ horizontalis maxime contractæ) *& cujus altitudo sit æqualis duplæ altitudini superficiei aqueæ supra foramen vel accuratius, duplæ altitudini, velocitati aquæ effluentis debitæ.* Igitur si nulla sit venæ contractio, prouti nulla est, cum per tubulum brevem aquæ effluant, repulsio duplo aut fere duplo major erit, quam à Newtono definita fuit. Fig. 74.

§. 3. Ut hanc propositionem demonstremus, considerandum hic erit principium aliquod Mechanicum cujus usum in aliis etiam quæstionibus solvendis sæpe expertus sum: principium hoc est:

Si corpus à quiete velocitatem eandem per pressiones motrices directas utcunque variabiles acquisiverit, atque singula pressiones in tempuscula sua multiplicentur, erit summa omnium productorum semper eadem, id est, si pressio sit $= p$, *tempusculum* $= dt$, *erit* $\int p\,dt$ *constans.* Hanc rem clarius exposui in Comment. Acad. Imp. Petrop. tom. 1. pag. 132.

§. 4. Ponamus jam cylindrum infinitæ veluti amplitudinis, ex quo aquæ horizontaliter effluant velocitate uniformi, abstrahendo ab actione, quam gravitas exerit in particulas, postquam jam effluxerunt, ita ut singulæ horizontaliter & uniformiter moveri pergant; particulæ autem accelerantur pressionemque patiuntur, quamdiu maximus velocitatis gradus nondum adest, huncque obtinent cum ad locum venæ maxime contractæ pervenerunt; hæc est ratio, quod sectionem venæ ibidem conceptam ceu orificium effluxus considerandum

ſiderandum eſſe dixi. Sit amplitudo iſtius Sectionis $= 1$, habeantque ibi aquæ velocitatem quæ debeatur altitudini A: ponatur, cylindrum aquæ effluxiſſe, qui pro baſe habeat 1 & pro longitudine L: ſi tempus exprimatur per ſpatium diviſum per velocitatem, erit velocitas altitudini A debita exprimenda per $\sqrt{2A}$, tempuſque fluxus per $\frac{L}{\sqrt{2A}}$. His præmiſſis indagabimus in preſſionem motricem, quæ poſſit tempore $\left(\frac{L}{\sqrt{2a}}\right)$ cylindro L communicare velocitatem $\sqrt{2A}$: ſit illa preſſio $= p$: putetur brevioris calculi ergo egiſſe tempore t cylindroque dediſſe velocitatem v; erit $dv = \frac{p\,dt}{L}$ & $v = \frac{pt}{L}$, hinc $p = \frac{Lv}{t}$; ponatur jam $\sqrt{2A}$ pro v & $\frac{L}{\sqrt{2A}}$ pro t atque erit $p = (L\sqrt{2A}) : \left(\frac{L}{\sqrt{2A}}\right) = 2A$. Eſt igitur preſſio aquam ad effluxum conſtanter ſollicitans æqualis ponderi cylindri aquei, cujus baſis ſit orificium aquas tranſmittens ſupra definitum & cujus altitudo ſit æqualis duplæ altitudini velocitati aquæ effluentis debitæ: & tanta quoque eſt reactio, quæ vas repellit. Q.E.D.

§. 5. Eadem eſt demonſtratio ſi aquæ non per orificium ſed per tubum horizontalem cylindricum velocitate uniformi effluant, aut etiam per tubum utcunque inæqualiter amplum: poſterius id directe demonſtrari etiam poteſt, ſi bene exprimatur preſſio requiſita in ſingulis guttis, ut hæ debita velocitatum incrementa aut decrementa ſuſcipiant.

§. 6. Altitudo, quam vocavimus A, parum quidem differt in experimentis ab altitudine aquæ ſupra orificium effluxus, præſertim ſi aquæ ex vaſe valde amplo per orificium ſimplex, idque non admodum parvum effluant: differt autem ſæpius notabiliter orificium effluxus à ſectione minima venæ, quam nos ceu orificium aquas tranſmittens conſideramus; id quantitas aquæ dato tempore effluentis cum velocitate ſua comparata in experimentis indicat.

Hinc fit ut propoſitio noſtra §. 3. ad experientiam vocata ordinario non multum diſcrepet ab propoſitione Newtoni §. 1. expoſita; ſi vero omnia ſollicite evitentur, quæ contractionem venæ producere & quæ velocitatem diminuere poſſunt, vis repellens ſecundum theoriam noſtram fiet tantum non duplo major, quam quæ à Newtono fuit definita & tunc talis etiam experimentis confirmatur.

At

At ut rem plane in apricum ponamus, eam generalius nunc prosequemur, idque tentabimus, ut vim repellentem à fluxus initio, dum velocitates continue mutantur, determinemus: neque enim primum nostrum theorema aliter quam cum velocitas invariata manet locum habet. Ut in quæstione hâc paullo intricatiore pertractanda eo intelligibiliores simus, hic quædam generaliora præmonuisse juvabit.

§. 7. *Quantitas motus* est factum ex velocitate in massam: si velocitates sint inæquales, habebitur *quantitas motus absoluta*, si singulæ particulæ per suam respective velocitatem multiplicentur productorumque summa accipiatur. *Quantitas motus* generatur à pressionibus motricibus dato tempore urgentibus & effectus causæ est æqualis censendus: Igitur summa pressionum motricium per sua tempuscula multiplicatorum æstimanda est ex genita quantitate motus. Et quia quælibet pressio motrix reagit in vas, ex quo aquæ effluunt, erit tota vis repellens pro quovis momento æqualis novæ quantitati motus divisæ per tempusculum, quo generatur. His præmonitis ad quæstionem ipsam progredior.

§. 8. Sit igitur vas infinitæ amplitudinis ACDB (Fig. 82.) eique horizontaliter infixa fistula EHID, cujus amplitudines utcunque inæquales ponuntur: amplitudo orificii HI fuerit $= 1$, longitudo fistulæ $= m$; velocitas utcunque variabilis in HI $= \sqrt{2v}$, seu talis, quæ debeatur altitudini v: dico primo, fore quantitatem motus absolutam aquæ in fistula contentæ æqualem $m\sqrt{2v}$, id est, talem ac si fistula esset cylindrica suaque amplitudine orificium HI exæquaret, quia nempe cujuslibet strati FGgf velocitas est massæ reciproce proportionalis. Fig. 82.

Jam vero fingamus dato tempusculo infinite parvo exilire per orificium HI columellam HLMI, cujus longitudinem HL vel IM ponemus $= \alpha$; erit massa hujus columellæ $= \alpha$, habebitque quantitatem motus $= \alpha\sqrt{2v}$: sed eodem tempore massa aquæ in fistula contentæ acquisivit quantitatem motus $\frac{m\,dv}{\sqrt{2v}}$ (habuit enim $m\sqrt{2v}$); est igitur quantitas motus absoluta dato tempusculo genita $= \alpha\sqrt{2v} + \frac{m\,dv}{\sqrt{2v}}$; hæc vero si dividatur per idem tempusculum (quod exprimendum est per $\frac{\alpha}{\sqrt{2v}}$) habebitur, ut vidimus §. 7. pressio quæsita vas repellens, quæ proinde si vocetur p, erit

 $p =$

$$p = \left(\alpha\sqrt{2v} + \frac{m\,dv}{\sqrt{2v}}\right) : \frac{\alpha}{\sqrt{2v}}, \text{ five}$$

$$p = 2v + \frac{m\,dv}{\alpha}.$$

(α) Apparet inde ultimam definitionem quæftionis pendere à ratione quæ intercedit inter dv & α; hanc vero in Sectione tertia generaliter definivimus, nulla tamen impedimentorum, quæ debentur cafui, facta attentione. Igitur & figura fiftulæ hic aliquid confert.

(β) Sequitur porro, fi fluxus uniformis factus ponatur, effe p conftanter $= 2v$, quia tunc $dv = o$: Id vero conforme eft cum eo, quod demonftravimus §. 5. Donec vero fluxus incrementa accipit (quod quidem facit notabiliter, idque diu fatis, fi canalis E I longior fuerit) vas aliam atque aliam patitur vim repellentem.

(γ) Habet dv ad α femper rationem realem: ergo vis repellens nunquam eft nulla, fic ut à primo fluxus tempore vas repellatur, etiamfi tunc aquæ fere nullæ effluant ob exiguam earundem velocitatem. Verum, ut ufus regulæ noftræ generalis unicuique pateat, eam nunc ad cafum fpecialem applicabimus, tribuendo fiftulæ E H I D figuram cylindricam amplitudinis 1.

§. 9. Si igitur fiftula ponatur cylindrica tota aperta in H I retentis cæteris pofitionibus & denominationibus, erit *vis viva* aquæ in fiftula contentæ $= mv$; hujus incrementum $= m\,dv$, cui addenda *vis viva* columellæ H L M I feu αv, eorumque fumma æqualis facienda facto ex altitudine, quam habet fuperficies aquæ A B fupra orificium H I, quamque vocabimus a, & ex maffula α. Eft igitur $m\,dv + \alpha v = \alpha a$, unde hic fit $\frac{dv}{\alpha} = \frac{a-v}{m}$. Ifto autem valore fubftituto in æquatione fuperioris paragrahi fit

$$p = a + v.$$

unde talia deduco confectaria.

(α) Longitudo fiftulæ nihil ad vim repellentem, quam vas fuftinet, tribuit, fi velocitas eadem ponatur, quia littera m è calculo evanuit, facit autem hæc longitudo (ficuti in fuperioribus fatis fuperque demonftravimus) ut velocitates citiora aut lentiora incrementa capiant; quo longior enim fuerit

rit fistula, eo tardius accelerantur aquæ & vicissim, sic ut in instanti à quiete maximum suum celeritatis gradum acquirant, si longitudo fistulæ nulla fuerit; at si infinitæ fuerit eadem hæc fistula longitudinis, aquæ nonnisi post tempus infinitum notabilem celeritatis gradum acquirere possunt.

(6) Fieri igitur potest non mutata aquarum altitudine, ut dispendio aquarum quantumvis parvo, vis repellens notabilis sit, eaque pro lubitu duret; & id quidem duplici obtineri potest modo, tum prolongando fistulam, tum etiam obturando sæpius orificium, antequam aquæ notabilem velocitatis gradum attigerint; prior tamen modus liberum aquarum fluxum per fistulam ponit: retardato enim ab impedimentis extrinsecis, in prælongis fistulis nunquam vitabilibus, aquarum fluxu, diminuitur quoque vis repellens.

(γ) Liceat hic paucis attingere verbis propositionem aliquam ex *princ. math. phil. nat. edit. 2. Newtoni*: Auctor hic postquam sententiam suam de velocitate aquarum ex vase effluentium in prima citati operis editione exhibitam mutasset, easque, si verticaliter sursum ejiciantur, ad integram superficiei aquæ altitudinem ascendere agnovisset in editione secunda, talia subjecit verba in *libro secundo propos. 36. coroll. 2. Vis qua totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualis est ponderi cylindricæ columellæ aquæ, cujus basis est foramen EF (vid. fig. Nevvt.) & cujus altitudo est 2 GI vel 2 CK.* Ista sententia à me olim & ab aliis fuit impugnata, ab aliis rursus confirmata. Nunc autem postquam hanc aquarum motarum theoriam meditatus sum, lis ita dirimenda mihi videtur, ut cum aquæ ad motum uniformem pervenerint, quæ quidem hypothesis est Newtoni, tunc recte altitudine 2 G I vis illa definiatur, sed ab initio fluxus, ubi velocitas adhuc nulla est, vis simplici altitudini G I respondeat, moxque crescente velocitate simul vis aquam ad effluxum animans crescat, & tandem ad eam magnitudinem exsurgat, quam Newtonus assignavit. Hæc nunc sunt unicuique obvia, quia vis motum aquæ generans, de qua Newtonus loquitur, non potest non esse æqualis vi repellenti, quam vidimus esse æqualem $a + v$. Recte etiam Ill. Riccatus, cum quo mihi de hoc argumento res erat interrogatus, *unde vis illa dupla aquarum altitudini conveniens oriri possit, cum* *obturato orificio gutta eidem imminens vi simplicis altitudinis urgeri manifeste appareat*, respondit, *distinguendum esse statum quietis à statu motus.*

§. 10. Si fistula vasi implantata non sit cylindrica, calculus ita erit ponendus.

Sit amplitudo canalis in F G vel $fg = y$; distantia strati F G $g f$ ab orificio E D $= x$, retineanturque cæteræ denominationes: erit *vis viva* aquæ in fistula contentæ $= v\int\frac{dx}{y}$, ejusque incrementum $= dv\int\frac{dx}{y}$, cui ut in §. præcedente factum est, addatur *vis viva* columellæ H L M I seu αv, eritque $dv\int\frac{dx}{y} + \alpha v = \alpha a$; unde sic oritur

$$\frac{dv}{\alpha} = (a - v) : \int\frac{dx}{y},$$

quo valore substituto in æquatione §. 8. fit

$$p = 2v + m(a - v) : \int\frac{dx}{y}.$$

Igitur cum in fluxu aquarum uniformi sit $v = a$, erit tunc rursus $p = 2a$. Cæterum quamdiu aquarum fluxus acceleratur, motus aquæ in vase A C D B orificio D E proximæ, à quo in toto hoc opere animum abstraximus, hic non est negligendus: determinari autem recte motus iste non potest, nec igitur accurate quadrat expressio quam dedi pro vi repellente si aquæ nondum uniformiter fluere ceperint, sed cum æquabiliter fluunt aquæ valet expressio accuratissime.

§. 11. Postquam sic demonstravimus pro effluxu aquarum uniformi, vim repellentem semper esse æqualem ponderi cylindri aquei foramini superinstructi & ad duplam aquæ altitudinem exsurgentis, lubet id etiam indirecte demonstrare per *deductionem ad absurdum*, ut & regularum mechanicarum ignari propositionis hujus satis paradoxæ veritatem perspiciant.

Hunc in finem considerabimus aquas verticaliter defluentes ex cylindro, abstrahendo animum ab impedimentis velocitati aquarum aliquid derogantibus & ab illa contractione venæ, quæ vitari potest. Foramini respondeat tubus verticalis, qualis conspicitur Fig. 76. habeant se omnia, ut in Sect. XII. §. 13. dictum fuit: aquæ habeant fluxum æquabilem: latera vasis & canalis

gra-

gravitate carere intelligantur, altitudo cylindri ponatur $= a$, & altitudo fistulæ $= b$, altitudo $cF = x$, amplitudo in $E = 1$; erit amplitudo in $F = \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt{(a+x)}}$ & in $C = \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt{a}}$: Denique ponatur amplitudo cylindri $= M$. His positis quæremus pondus omnis aquæ ABCE: exprimemus pondus aquæ ABC per Ma & sic erit pondus aquæ $CE = 2a + 2b - 2\sqrt{(aa+ab)}$; ergo pondus omnis aquæ $ABCE = Ma + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa+ab)}$: Sic igitur posito aquas stagnare in vase & fistula, vis requisita ad suspendendam aquam est $= Ma + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa+ab)}$.

Jam vero indagabimus vim similem cum aquæ per E tota sua velocitate (quâ nempe ad altitudinem $a+b$ ascendere possunt) effluunt: hæc autem habebitur, si à priori vi subtrahatur vis repellens: Si proinde hæc vis repellens ponatur, ut nos statuimus, $= 2a + 2b$, erit vis aquas, durante fluxu suspendens $= Ma - 2\sqrt{(aa+ab)}$.

At vero finge abesse tubum CE, & erit per easdem nostras regulas vis suspensoria, dum aquæ per orificium C erumpunt, rursus $= Ma - 2\sqrt{(aa+ab)}$, ideo, quia pondus aquæ ABC est Ma & quia amplitudo foraminis C est $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}}$, quæ multiplicata per duplam altitudinem a dat $2\sqrt{(aa+ab)}$. Monstrat igitur nostra virium repellentium æstimatio, vim suspensoriam durante aquarum effluxu eandem esse, sive nulla sit fistula, sive adsit & quamcunque habeat longitudinem, modo fistula figuram habeat §. 13. Sect. XII. descriptam: atque hujus consensus & identitatis necessitas apparet quoque sine calculo ex ipsa rei natura, quando fistula ita formata nullam in aquis transfluentibus facit mutationem, cum vena aquæ sua sponte eandem figuram induit, quam habet fistula, quamdiu aquæ cohærent. Sed si aliter vim repellentem æstimemus, nunquam consensum illum inter vires suspensorias generaliter obtinebimus: Ita v. gr. si secundum sententiam communem dicamus vim repellentem esse æqualem ponderi simplicis cylindri sæpe nominati, erit vis repellens, dum aquæ per canalem CE ex vase ACB effluere finguntur $= a + b$; & hæc vis si subtrahatur à pondere totius aquæ ABCE seu $Ma + 2a + 2b - 2\sqrt{(aa+ab)}$, relinquitur $Ma + a + b - 2\sqrt{(aa+ab)}$ quæ est vis requisita ad suspendendum systema ABCE, dum aquæ fluunt: Vidimus autem hanc vim eandem esse debere, si canalis CE absit: Sed tunc est vis suspensoria $= Ma - \surd(aa + ab)$, quia pondus aquæ ABC est $= Ma$ & vis repellens per hypothesin est simplex cylindrus foramini C ad altitudinem a superinstructus. Deberet igitur in hâc hypothesi semper esse $Ma + a + b - 2\surd(aa + ab) = Ma - \surd(aa + ab)$ seu $a + b = \surd(aa + ab)$, quod est absurdum. Similis absurditas demonstrari posset, si vena sursum verticaliter ascendere putetur: & frustra hic exciperetur pro communi sententia firmanda, venam effluentem CE fingi non posse tanquam continuam, nisi aliqua aquæ tenacitas fingatur simul (aliàs enim venam mox præ orificio in guttulas abruptum iri) & tenacitatem rei statum permutare: nam profecto nec velocitates aquæ à cohæsione mutua aquæ in CE mutantur nec latera canalis CE pressionem ullam sentiunt, sicut demonstravi Sect. XII. §. 13. ut taceam cohæsionem aquæ non oriri à tenacitate sed ab aliqua virtute magnetica seu à mutua attractione, à qua virtute centrum gravitatis in nullo systemate nec majorem nec minorem velocitatem acquirere potest. Sed hæc porro adversariorum exceptio in venis verticaliter ascendentibus nullum plane locum habet, cum aquæ ibi continuè maneant, si vel nulla aquis insit tenacitas aut mutua attractio.

At possem infinitis aliis modis & exemplis particularibus sententiam nostram confirmare, si hisce diutius insistere vellem. Ita v. gr. in Fig. 29. Sect. V. §. 4. descripta, si sit altitudo $NS = 1$, orificium $LM = 1$, & orificium $RS = 2$, erit $PB = \frac{1}{3}$, vis repellens, quæ oritur ab effluxu aquæ per RS $= 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, & demonstrare possum vim repellentem, quæ prodit ab effluxu aquæ ex simplici cylindro RN per LM esse etiam $= \frac{4}{3}$, & sic vim repellentem totalem esse $= \frac{8}{3}$, quæ præcise facit duplum cylindrum aqueum foramini LM ad altitudinem $NS + PB$ insistentem. Talis autem consensus ex aliis theoriis falso receptis minime prodit, ita ut de nostra amplius non possint dubitare, nisi harum rerum penitus ignari: Id vero, quod dixi, vim repellentem aquæ ex simplici cylindro RN per LM effluentis esse $= \frac{4}{3}$, si demonstrare velim, postulat ut vis repellens definiatur, cum aquæ ex vase non infinito data velocitate quacunque non variata fluunt: Ne vero prolixior sim in hâc re, id aliis efficiendum relinquo; neque id nunc amplius magnam facesset operam; Pergo ad alia.

§. 12. Demonstrationes quas adhuc dedimus non valent nisi pro fistulis

lis rectis, in quibus nempe uniuscujusque guttulæ vis motrix, indeque oriunda vis repellens, inter se singulæ conspirant, communemque habent directionem: at cum fistulæ vasi implantatæ, per quas aquæ effluunt, sunt incurvatæ, alius adhibendus est demonstrandi modus: Ut nihil in isto argumento prorsus novo omittamus, hunc quoque casum docebimus: nec erit, quod laboris pœniteat, cum inde veræ pressionum leges, quas natura non solum in his casibus, sed & multis aliis sequatur, apparebunt.

§. 13. Concipiamus itaque vasi infinito fistulam implantatam esse uniformis quidem amplitudinis, sed incurvatam secundum curvaturam qualemcunque AS (Fig. 83.) ita ut A locus sit insertionis, S locus effluxus: Ducantur tangentes in A & S, nempe AR & SB, sitque AB ad SB perpendicularis: fuerit velocitas aquæ per fistulam transfluentis uniformis & talis, quæ debeatur altitudini A; amplitudo fistulæ ubique $= 1$: *Dico totam vim repellentem in directione SB sumtam fore rursus* $= 2A$, hancque solam adfore. Fig. 83.

Demonstrationis gratia ducantur infinite propinquæ nq, ep ad SB perpendiculares; nm parallela eidem SB; sit $Sq = x$, $qp = dx$; $qn = y$; $em = dy$: erit radius osculi in $en = \frac{-ds\,dy}{ddx}$, sumtis elementis en quæ vocabo ds pro constantibus; habet autem columella aquæ intercepta inter e & n vim centrifugam, sic determinandam: gravitas columellæ est $= ds$ (quia basis ejus $= 1$ & altitudo $= ds$) atque si radius osculi foret $= 2A$, haberetur per theorema Hugenianum vis centrifuga particulæ æqualis ejusdem gravitati, & sunt vires centrifugæ cæteris paribus in reciproca ratione radiorum: est igitur vis centrifuga columellæ $= \frac{-2A\,ddx}{dy}$: exprimatur hæc vis centrifuga per ec ad curvam perpendicularem, ducaturque co ipsi BS parallela: resolvatur vis ec in oc & eo; erit (ob similitudinem triangulorum eoc & nme) vis $oc = \frac{-2A\,ddx}{ds}$, vis $eo = \frac{-2A\,dx\,ddx}{dy\,ds} =$ (ob ds constans) $\frac{2A\,ddy}{ds}$.

Sed vis elementaris oc agit sola in directione SB, dum altera eo pro hac directione est negligenda: sumatur integrale vis elementaris oc cum constanti tali, ut integrale una cum abscissa evanescat: integrale hoc est $= 2A$

$= \frac{2Adx}{ds}$, quia in S eſt $dx = ds$: Nunc ut habeatur vis in directione tangentis S B pro tota fiſtula, ponendum eſt $\frac{RB}{RA}$ pro $\frac{dx}{ds}$, ergo tota vis ſecundum tangentem S B $= 2\,A - \frac{2A \times RB}{RA}$. Hæc vero oritur à vi centrifuga cujusvis guttulæ: ſed alia vis ſupereſt conſideranda; nempe dum aqua ex vaſe infinite amplo continue in fiſtulam influit velocitate uniformi reſpondente altitudini A, vas repellitur ſecundum directionem R A vi 2 A (per §. 4.) quà reſoluta in tangentialem ſecundum S B eique perpendicularem ſecundum B A, prior $\frac{2A \times RB}{RA}$ erit ſola conſideranda; & quia habet directionem communem cum vi $2\,A - \frac{2A \times RB}{RA}$ à vi centrifuga oriunda & modo definita, erit eidem addenda: ſicque ſumma $2\,A - \frac{2A \times RB}{RA} + \frac{2A \times RB}{RA}$ vel 2 A exprimet vim repellentem ſecundum directionem S B.

Ut porro demonſtremus ſub nulla alia directione vas repelli, recurremus ad vim elementarem eo, quam vidimus $= \frac{2Addy}{ds}$, cujus integrale $= \frac{2A \times AB}{AR}$, quæ præciſe annihilatur à vi 2 A vas repellente ſecundum directionem R A, poſtquam hæc debite reſoluta fuit. Q. E. D.

§. 14. Hæc theorematis generaliſſimi ſimplicitas, quà nempe vis repellens in directione aquis uniformiter effluentibus contraria indicatur conſtanter $= 2\,A$, *argumentum* eſſe poteſt, quod dicitur *ad hominem* pro ejusdem bonitate, iis qui ratiocinium noſtrum aut non aſſequentur aut examinare non cupient ſufficienti attentione. Si vero vim repellentem aquæ ex vaſe infinito in fiſtulam influentis ſub directione A R ſtatuas $= A$, vides ſyſtema repelli in directione S B vi quæ ſit $= 2\,A - \frac{A \times RB}{RA}$, quod abſurdum eſſe vel ipſa mihi indicare videtur formula. Neque in hâc opinione nulla eſſet vis in directione ad priorem perpendiculari: Nam vas deberet reprimi ſecundum directionem B A vi $\frac{A \times AB}{AR}$, quod iterum mihi eſt abſurdum & cujus falſitatem experimento cognovi, in caſu quo angulus A R S erat rectus & A B = A R.

Mul-

Multa alia theoremata pro hoc argumento in tota sua, quam habere potest, extensione, sumto erui & demonstrari poterunt, pro fluxu aquarum nondum uniformi eoque per fistulam utcunque inæqualem, modo simul attendatur ad ea, quæ §. 8. monita fuerunt. Quia vero per singula ire non vacat, ad aliam progredior vim examinandam priori sub directione contraria æqualem, illam nempe quam vena effluens in planum exerit, dum in illud perpendiculariter impingit.

§. 15. De impetu venæ aqueæ in planum impingentis multi commentati sunt, plurimaque sumsere experimenta. Ego quoque hâc de re quædam dedi in *Comm. Acad. Sc. Petrop. tom.* 2. Experimenta extant apud Mariottum in *tract. de mot aquarum*, in *hist. Acad. Sc. conscripta a D. du Hamel. p.* 48. & alibi. Equidem non admodum conveniunt, plurima tamen indicare prima fronte videntur nisum venæ aqueæ uniformiter fluentis æqualem esse ponderi cylindri aquei, cujus basis sit foramen, per quod aquæ effluunt & cujus altitudo sit æqualis altitudini aquæ supra foramen: Huic sententiæ pleriqueimo omnes, adhæserunt & adhuc adhærent, quia cum aliis quoque experimentis, præsertim quæ de globis in medio resistente motis sumi solent, mire convenit: Eandem igitur ipsemet secutus sum, quamvis plura animum suspendebant, in *cit. Comm. Petrop.* nec hæsitavi in ipso hoc opere, quod sub manibus habeo, Sectione nempe IX. §. §. 31. 32. illa instar exempli uti. Verum enim vero re attentius perpensa, novisque adhibitis principiis, simulque aliis novi generis experimentis institutis, clare tandem vidi communem istam opinionem de impetu venæ aqueæ eodem modo mutandam esse, sicuti Newtoni de vi repellente, scilicet ut loco orificii consideretur sectio venæ contractæ & loco altitudinis aquæ adhibeatur dupla altitudo velocitati aquarum reali respondens: Demonstratum enim habeo, vim repulsionis §. 2., expositam omnino æqualem esse impetui venæ, si hæc tota in planum perpendiculariter incidat: sequitur inde impetum venæ majorem esse, quo minor fuerit venæ contractio, hácque plane evanescente, & aquis simul tota sua velocitate, quam in theoria habere possunt, erumpentibus, tum impetum duplo majorem esse, quam vulgo statuitur: quia vero semper & velocitati aliquid decedit & vena non raro ad dimidium fere contrahitur, factum est ut experimenta pleraque simplam in Cylindro altitudinem arguere visa fuerint in impetu illo æstimando. Velim autem probe notetur, de venis solitariis tantum mihi hic sermonem esse, quas plana totas excipiant, non autem de fluidis corpora ambientibus in eademque impetum facientibus, veluti de Ventis aut fluminibus: dico enim hos duplicis generis impetus quos auctores adhuc confuderunt, probe à se invicem distinguendos esse, ob rationes infra breviter exponendas.

§. 16. Ratione venæ aqueæ sic censeo: aquas velocitate uniformi ex
Fig. 84. cylindro infinite amplo verticali A B M (Fig. 84.) per foramen laterale C M horizontaliter effluere pono, venamque perpendiculariter impingere in laminam E F: ita facile video, quia particulæ insequentes priores impediunt ne resilire possint, fore ut singulæ ad latera deflectantur, idque motu laminæ E F (si modo hæc sat magna fuerit, ut vena tota quamvis dispersa excipiatur) parallelo vel tantum non tali: Et quia omnia sunt in *statu permanentia*, fingere licet laminam E F vasi esse affirmatam, venamque lateribus C H D G L M circumdatam, ita, ut aquæ per hiatum circularem D E G F effluere ex vase A B C H D E F G L M censeri possint. Hoc si ita fuerit, demonstravimus §. 13. guttulas in D E effluentes vim repellentem quidem producere secundum E F; sed simul apparet vim repellentem esse in G F priori contrariam ita ut ad hanc virium repellentium classem hic non sit attendendum. Quod vero ad directionem, laminæ E F vel cylindro B C, perpendicularem attinet, demonstravimus in fine ejusdem §. 13. sub ea directione plane nullam fieri repulsionem: Igitur tantum lamina E F propellitur, quantum cylindrus repellitur. Idque est quod demonstrare volui: Atque inde jam sequitur, *pressionem venæ aqueæ, quæ tota in laminam incurrit, tantam esse quanta pondus cylindri aquei, qui pro basi habeat sectionem venæ (postquam hæc uniformem acquisivit amplitudinem) & pro altitudine duplam altitudinem velocitati aquarum (postquam hæc similiter uniformis facta est) debitam.*

§. 17. Non dubito multos fore, quibus propositio hæc plane nova suspecta videatur atque experimentis contraria: Hos vero perpendere velim, experimenta hactenus sumta nequaquam regulæ communi accurate respondere, & in plerisque casibus nostram Regulam parum differre à communi, quamvis in theoria maxime sint diversæ: tum etiam eos in antecessum monitos cupio, alia me instituisse experimenta, quæ singula meam sententiam exactissime confirmant, veteremque plane refellunt! experimenta a me sumpta in fine Sectionis recensebo. Demonstrandi modus quo usus fui, fortasse etiam parum

vide-

videbitur quibusdam accuratus, habeo autem aliam demonstrationem directam, quæ nova proprietate innititur Mechanica mihi aliquando observata, quamque hic communicabo, tum quia dictam demonstrationem facillime quivis inde deducere, tum etiam quia ad alios usus eandem impendere poterit: Ita autem se habet.

Si corpus movetur velocitate uniformi, directiones autem suas continue mutat à causis quibuscunque & utcunque agentibus, donec directionem acquisiverit perpendicularem ad primam directionem, sique singulæ pressiones corpus deflectentes resolvantur in duas classes, alteram parallelam primæ directioni, alteram perpendicularem; Denique si pressiones singulæ parallelæ multiplicantur per sua tempora; dico fore summam productorum constanter eandem, & quidem æqualem ei, quæ totum motum à quiete generare aut generatum totum absorbere valet.

Hâc affectione Dynamica, cum utimur in præsenti nostro negotio, considerandа est lamina E F, quæ sua in aquas reactione, earundem directionem mutat, usque dum perpendicularis ad primam facta fuerit: Ergo propositio præcedentis paragraphi ope hujus affectionis eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus §. 4. ad determinandam vim repellentem ope principii §. 3. expositi. Hæc igitur vera idea videtur, quam de impetu aquarum mente concipere debemus: ponit autem guttas aquæ singulas secundum directionem laminæ ad latera resilire, in quâ indole aquas non recedere semper observavi: vidi tamen etiam guttulas aliquas sed paucas retrorsum resilire; hæ autem majorem pressionem producunt, quam quæ ad latera deflectuntur: Et eo ipso inducor, ut firmiter credam, si vena aquea magno impetu oblique contra planum impingat, v. gr. sub angulo triginta graduum, pressionem inde orituram plusquam dimidiam ejus, quæ à vena eadem directe impingente oritur, cum secundum regulas ordinarias exactè dimidiam vim exerere deberet: ratio ejus rei est, quod in impulsu obliquo plures particulæ resilire possint, quam in directo, imo fere omnes, si magna fuerit velocitas.

Si autem omnes ita resilire ponantur, ut angulus incidentiæ angulo reflexionis æqualis sit, tunc uterque impulsus idem censendus erit. Optimus hic aquarum pressiones æstimandi modus est, qui ratiocinio à *posteriori* innititur.

§. 18. Sequitur porro ex præfata affectione probe intellecta, eundem oriri à pressionibus effectum sive lamina aquas ad latera deflectat, sive causa fingatur motum omnem, quem particulæ aqueæ cylindrum egressæ acquisive-
Fig. 85. runt, absorbens: Inde intelligitur quid futurum sit, si orificium CM (Fig. 85.) per quod aquæ ex cylindro ABM effluunt, aliis aquis in vase PQFE stagnantibus submersum fuerit: repelletur nempe cylindrus ABM versus PQ intra vas PQFE, si hoc cum cylindro non cohæreat; At si vasa inter se fuerint firmata, nullam patietur systema pressionem prævalentem; quanta enim est pressio versus PQ ab effluentibus aquis, tanta quoque oritur pressio contraria versus EF à continua destructione motus, quem particulæ cylindrum egressæ acquisivere.

§. 19. Dixi de pressione venæ, quam lamina totam etiamsi expansam excipit: Venio ad alteram speciem impetus aquarum, quem scilicet sustinent laminæ fluido undique submersæ: puto autem hanc non posse *absolute* definiri, quia singulæ particulæ in laminam impingentes aliter deflectuntur. Si vero cujuslibet particulæ deviatio cognita ponatur, non difficilis erit amplius quæstionis solutio, mutato paullum theoremate, quo §. 17. usi sumus eoque generaliori reddito, nempe tali: *si angulus mutatæ in corpore moto directionis non fuerit rectus, sed recto minor, tunc quoque minor erit summa productorum (de quâ antea sermo fuit) in ratione ut sinus versus mutatæ directionis ad sinum totum.*

Igitur pro quâvis guttula indagandum esset, quantum directionem motus ab obice, seu lamina cursui opposita mutare cogatur. At in theoria hujusmodi definitiones exhiberi accurate vix possunt; nec experientia probat theoremata hanc in rem exhiberi solita; veluti quod conatus fluminis directe contra circulum impingentis duplo sit major conatu ejusdem fluminis contra sphæram ejusdem diametri, & quæ sunt similia: quod autem quantitas pressionis pro sphæra, qualis dari solet ab auctoribus, cum experimentis à Newtono aliisque institutis & in *princ. math. phil. nat.* recensitis, satis accurate conveniat, id omnibus bene perpensis casui fortuito tribuendum esse censeo.

Theoremata quæ ad motum in mediis resistentibus theoretice consideratum faciunt, tum etiam varias observationes physicas dedi in *tom. II. Comm. Acad. Sc. Petrop. & seqq.* Neque proinde ea hic repetam, quamvis ad institutum nostrum pertineant; diutius meditationibus hisce hydrodynamicis immorari non vacat.

vacat: Igitur ad finem propero. Novam hanc circa reactionem & impetum fluidorum theoriam, quæ receptam ab omnibus adhuc auctoribus opinionem evertit in re magni momenti, singulari Dissertatione prosecutus sum, quæ suo tempore *Commentar. Academ. Scient. Imp. Petropol.* inferetur eandemque indubitatis confirmavi experimentis. Venio nunc ad argumentum aliud, Geometrarum attentione minime indignum.

§. 20. Mentem aliquando subiit, posse ea quæ de vi repellente fluidorum, dum ejiciuntur, meditatus fueram, quæque hic maximam partem exposui, utiliter applicari ad novum instituendum navigationis modum: neque enim video, quid obstet, quo minus maximæ naves sine velis remisque eo modo promoveri possint, ut aquæ continue in altum eleventur effluxuræ per foramina in ima navis parte, faciendo ut directio aquarum effluentium versus puppim spectet. Ne quis vero opinionem hanc in ipso limine rideat, ceu nimis insulsam, è re erit nostra argumentum istud accuratius excutere & ad calculum revocare: utile enim esse potest multisque disquisitionibus geometricis est fertilissimum.

Incipiam ab eo, ex quo deinde apparebit, sub quibus circumstantiis maximus successus à nova ista navigatione expectari debeat.

§. 21. Notandum igitur est, navem ab haustis aquis continue retardari ob inertiam earundem, quando illis eadem velocitas communicatur quacum navis fertur & dum communicatur, navis à reactione aquarum retrorsum urgetur, simul ac ab earundem effluxu antrorsum premitur. Iste actionum contrariarum concursus limites ponit vi naves propellenti à data potentia absoluta obtinendæ: nisi enim actio prior adesset (de qua ut verum fatear diu non cogitavi) posset *labore hominum quantumvis parvo vis naves propellens utcunque magna obtineri*, quod sic demonstro.

In sectione nona (vide præsertim §. 26.) ostendi, laborem hominum in elevandis aquis impensum, quem voce *potentiæ absolutæ* designo, æstimandum esse ex producto quantitatis aquarum in altitudinem elevationis, ita ut verbi gratia labore secundum omnes mensuras eodem possint & quatuor pedes cubici ad altitudinem sedecim pedum & sedecim pedes cubici ad alitudinem quatuor pedum elevari: Dico nunc porro pressionem uniformem, naves antrorsum propellentem adesse, quamdiu fluida velocitate æquali effluunt, quæ pressio æstimanda sit ex quantitate aquarum effluentium & ex radice al-

 ti-

titudinis aquarum in vaſe ſupra foramen poſitarum : fuerit enim quantitas aquarum dato tempore effluentium $= Q$; altitudo earum $= A$, erit magnitudo foraminis aquas eructantis proportionalis cenſenda quantitati $\frac{Q}{\surd A}$ pro eodem tempore: at vero vis repellens, quæ hic navem promovet, æqualis eſt magnitudini foraminis ductæ in duplam altitudinem aquarum (per §.4.) id eſt, æqualis quantitati $\frac{Q}{\surd A} \times 2A$ ſeu $2Q\surd A$. Ex comparatione utriusque propoſitionis ſequitur laborem hominum in elevandis aquis exantlatum eſſe ad vim naves propellentem inde obtinendam, ut QA ad $2Q\surd A$ ſive ut $\surd A$ ad quantitatem aliquam conſtantem : igitur quo minor eſt altitudo ad quam aquæ elevantur, eò major vis naves promovens ab eodem labore obtinetur, *ita ut labore hominum quantumvis parvo vis naves propellens utcunque magna obtineri poſſit.* Verum etiam inertia aquarum, quæ hauriuntur, (de qua ab initio hujus paragraphi diximus) naves retardans eo majorem obtinet rationem ad vim naves propellentem, quo minor aſſumitur altitudo A, ad quod animus hic probe eſt advertendus.

§. 22. Perſpicuum eſt ex præcedente paragrapho, altitudinem ad quam aquæ ſunt elevandæ eſſe ex earum claſſe, quæ alicubi maximæ ſunt. Ut vero altitudo maxime ad propoſitum proficua determinetur, aliæ nobis ſe offerunt quæſtiones prius examinandæ.

Problema.

Ponatur navis uniformi progredi velocitate, quæ generatur lapſu libero per altitudinem B, fingaturque aquas continue affluere in navem, veluti ſub forma pluviarum, & quidem tanta quantitate, quantam remotis omnibus impedimentis alienis ſuppeditaret cylindrus conſtanter plenus ad altitudinem A per orificium magnitudinis M. Quæritur quantam reſiſtentiam navis ab iſto perpetuo & uniformi aquarum affluxu earundemque inertia patiatur.

Solutio.

Aſſumatur tempus quodcunque t, quod ſi æſtimetur ex ſpatio, quod fluidum affluens ſua velocitate percurrit, diviſo per eandem velocitatem, tunc velo-

velocitas eſt exprimenda per $\sqrt{2A}$ & erit quantitas aquæ tempore t affluens æqualis cylindro ſuper baſi M conſtructo longitudinis $t\sqrt{2A}$: iſta vero quantitas tempore t, dum à nave aufertur, accipit velocitatem debitam altitudini B & exprimendam per $\sqrt{2B}$: quærenda itaque eſt vis uniformis, quæ poſſit tempore t, cylindro aqueo $Mt\sqrt{2A}$ communicare velocitatem $\sqrt{2B}$ & erit iſta vis ob reactionem, quæ in navem reagit, æqualis cenſenda reſiſtentiæ quæſitæ. Sit præfata vis $= p$, puteturque dediſſe tempore θ velocitatem v cylindro aqueo $Mt\sqrt{2A}$ & erit $dv = \frac{p\,d\theta}{Mt\sqrt{2A}}$, atque $v = \frac{p\theta}{Mt\sqrt{2A}}$: ponatur jam $\sqrt{2B}$ pro v & t pro θ eritque $\sqrt{2B} = \frac{p}{M\sqrt{2A}}$ ſive $p = 2M\sqrt{AB}$.

Eſt igitur reſiſtentia quæſita æqualis ponderi cylindri aquei, cujus baſis eſſet æqualis orificio M & cujus longitudo æqualis duplæ mediæ proportionali inter altitudines A & B.

Problema.

§. 23. Sit in navi cylindrus altitudinis ſupra ſuperficiem maris A, per cujus orificium in eadem ſuperficie poſitum amplitudinis M aquæ verſus puppim effluant ſine ullo impedimento, conſerveturque cylindrus aqua conſtanter plenus, determinare potentiam navem continue propellentem.

Solutio.

Potentia navem propellens eſt æqualis reactioni aquarum dum effluunt, ſeu vi repellenti diminutæ potentia in præcedente paragrapho definita ab inertia aquarum, quæ continue hauriuntur, oriunda. Vis repellens eſt æqualis, per paragraphum hujus ſectionis quartum, $2MA$ & hæc navem promovet: vis altera quæ navem retardat eſt per præcedentem paragraphum $= 2M\sqrt{AB}$. Eſt igitur potentia abſoluta navem promovens $= 2M - 2M\sqrt{AB}$.

Corollarium.

§. 24. Si navis nullam habeat velocitatem, erit vis navem urgens $= 2MA$; atque ſi navis eadem velocitate movetur qua aquæ in plagam contrariam effluunt, fit $B = A$ & tunc navis nulla vi propellitur. Si proinde navis

vis vel liberrime moveretur ſuper mari, non acquireret tamen ab actione aquarum, quæ continue hauriuntur inferiusque effluunt, majorem velocitatem quam eam, qua aquæ effluunt, non quod aquæ ex vaſe uniformiter moto effluentes vas minori vi quam ex vaſe immoto repellant, ſed quod tunc inertia aquarum reſiſtentiam producat vi repellenti æqualem.

Problema.

§. 25. Data potentia operariorum, qui aquas elevant, & data altitudine ad quam aquæ elevantur, invenire amplitudinem foraminis effluxus & vim repellentem.

Solutio.

Sit potentia talis, qua ſingulis minutis ſecundis numerus pedum cubicorum aquæ N poſſit ad altitudinem unius pedis elevari, quam potentiam vi experimenti ſecundi ſectioni nonæ ſubjuncti exerere poteſt operariorum numerus deſignandus per $\frac{1}{4}$N. Sit altitudo ad quam aquæ continue elevantur $=$ A in pedilus expreſſa: amplitudo orificii in pedibus quadratis $=$ M; erit numerus pedum cubicorum aquæ, quem operarii data potentia ad altitudinem A ſingulis minutis ſecundis elevare poſſunt, $= \frac{N}{A}$ (per §. 22. *ſect.* 9.) erit igitur orificium ejus amplitudinis conſtruendum, ut ſingulis minutis ſecundis numerus iſte pedum cubicorum aquæ per id effluere poſſit, ſi liberrime effluant. Sumamus autem loco minutorum ſecundorum tempus, quod corpus inſumit, dum libere cadit per altitudinem A: tempus id eſt hic exprimendum $\frac{1}{4}\sqrt{A}$, (poſito concinnioris calculi gratia corpus à quiete libere cadens intra minutum ſec. abſolvere 16. *ped.*) & hoc tempore debet effluere numerus pedum cubicorum aquæ deſignandus per $\frac{N}{A} \times \frac{1}{4}\sqrt{A}$ ſeu $\frac{N}{4\sqrt{A}}$: effluit autem revera 2 M A, nempe cylindrus aqueus cujus baſis eſt M & cujus longitudo facit duplicem altitudinem A: eſt igitur $\frac{N}{4\sqrt{A}} = 2MA$; unde amplitudo orificii ſeu

$$M = \frac{N}{8A\sqrt{A}}.$$

Vis autem repellens fit æqualis 2 M A ſeu $= \frac{N}{4\sqrt{A}}$.

Scho-

Scholium.

§. 26. In quavis nave aquæ ad aliam atque aliam altitudinem ſunt elevandæ, ut eadem potentia, quæ in hauriendis aquis inſumitur, vis navem promovens maxima obtineatur & duo requiruntur ad altitudinem illam utiliſſimam definiendam pro certo operariorum numero. *Primo* ut cognitum ſit quamnam velocitatem propoſita navis à data potentia acquirat: ratione hujus poſtulati, ponemus navem à preſſione, quæ ſit æqualis ponderi unius pedis cubici aquæ ſeu circiter 72 librarum acquirere velocitatem, quæ generetur lapſu libero per altitudinem C, & quia deinceps ſemper in pedibus menſuras omnes exprimemus, erit pondus unius pedis cubici aquæ exprimendum per unitatem. *Secundo* pro cognita aſſumenda eſt relatio inter celeritates navis & potentias navem propellentes: ſtatuitur hic vulgo velocitates habere rationem ſubduplicatam virium propellentium, experimenta quidem hanc hypotheſin non exactè confirmant in motibus lentis; interim tamen eam reliquis omnibus præferendam cenſemus. Si quis velit rem ſub alia hypotheſi explorare, is poterit eodem modo, quo nunc utemur, calculum inſtituere.

Problema.

§. 27. Invenire altitudinem, ad quam aquæ continue elevandæ ſunt, inſtituto utiliſſimam, nempe talem, ut eadem potentia in elevandis aquis adhibenda vis navem promovens maxima oriatur.

Solutio.

Serventur denominationes omnes in hoc argumento adhibitæ: erit ante omnia inquirenda velocitas navis ſeu altitudo huic velocitati debita quam vocavimus B. Quia vero velocitates navis ponuntur proportionales radicibus potentiarum navem urgentium, erunt altitudines velocitatum ipſis potentiis proportionales. Erit igitur talis analogia inſtituenda.

Sicuti pondus unius pedis cubici ad altitudinem C (conf. §. 26.) ita preſſio navem urgens ſeu $2MA - 2M\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ (vid. §. 23.) ad altitudinem velocitati navis reſpondentem, quæ proinde erit $2MC \times (A - \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{B}})$: Hanc vero altitudinem vocavimus B: Eſt itaque

$$B = 2MC \times (A - \sqrt{AB}).$$

Exinde fit preſſio navem urgens $= \frac{B}{C}$, atque adeo proportionalis altitudini B, quia C eſt quantitas conſtans: ergo & preſſio navem promovens & altitudo navis velocitati reſpondens ſimul fiunt maximæ: Igitur ſi pro præſenti inſtituto differentietur quantitas $2MA - 2M\sqrt{AB}$, quæ preſſionem navem propellentem exprimit, poterit poni $dB = o$. Prius vero quam differentiatio inſtituatur oportet pro M ſubſtituere valorem ejus §. 25. & tunc fit preſſio navem promovens $= \frac{N}{4\sqrt{A}} - \frac{N\sqrt{B}}{4A}$, in qua littera N eſt conſtans, litteræ vero B & A variabiles. Sumatur nunc ejus differentiale, faciendo $dB = o$, idque fiat $= o$; atque ſic reperietur $A = 4B$.

Eſt igitur vis navem promovens maxima cum altitudo, ad quam aquæ elevantur, eſt quadrupla altitudinis velocitati navis debitæ.

Ponatur in æquatione $B = 2MC \times (A - \sqrt{AB})$ ſuperius inventa $A = 4B$ & reperietur

$$M = \frac{1}{4C},$$

& quia (per §. 25.) eſt $M = \frac{N}{8A\sqrt{A}}$, fit tunc

$$A = (\tfrac{1}{2}NC)^{\frac{2}{3}}, \text{ atque}$$

$$B = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}NC)^{\frac{2}{3}}.$$

Corollarium.

§. 28. Si ad præceptum præcedentis paragraphi orificio, per quod aquæ inferius ex canali verſus puppim effluunt, concilietur amplitudo $\frac{1}{4C}$, id eſt, talis. quæ ſe habeat ad amplitudinem unius pedis quadrati, ſicuti menſura unius pedis, ad altitudinem quadruplam velocitati navis, vi 72. librarum animatæ, debitam, fiet tunc ut navis dimidia velocitate feratur ejus qua aquæ effluunt & erit vis repellens aquarum effluentium

$$2MA = \frac{1}{2C} \times (\tfrac{1}{2}NC)^{\frac{2}{3}},$$

vis

vis vero navem promovens hujus erit dimidia, adeo ut dimidius effectus perdatur ab inertia earundem, quæ continue hauriuntur, aquarum.

Scholium.

§. 29. Postquam sic demonstravimus, quomodo utilissime maximoque cum successu iste navigandi modus sit instituendus, nunc porro rem istam exemplo illustrandam esse puto tali, quod cum ipsa rei natura non male convenire crediderim ut simul appareat, qualis præterpropter eventus futurus sit.

Consideremus triremem, vulgo *galeram*, cum 260 remigibus: ponamus hanc galeram pondere unius pedis cubici aquæ seu 72. librarum tractam perficere singulis minutis secundis spatium duorum pedum, cujus velocitatis altitudo genitrix indicata per C est $= \frac{1}{16}$, posito corpus grave libere à quiete decidens primo minuto secundo perficere 16. *ped.* Quia porro 260. operarii adhibentur, quorum quivis vi experimenti secundi ad *Sect.* 9. pertinentis potest singulis minutis secundis quatuor quintas partes pedis cubici ad altitudinem unius pedis elevare, erit $N = \frac{4}{5} \times 260 = 208$. Fiat igitur orificium, per quod aquæ effluant, amplitudinis 4 pedum quadratorum: poteruntque operarii aquam in canali supra orificium elevatam conservare ad altitudinem proxime $3\frac{1}{2}$ *ped.* quæ indicatur litera A, & si sumas hujus altitudinis quartam partem habebis $B = \frac{7}{8}$ *ped.* adeo ut navis tali velocitate sit ista navigatione progressura, quam grave acquirit lapsu libero per altitudinem $\frac{7}{8}$ *ped.* sic ergo navis singulis minutis secundis spatium $7\frac{1}{2}$ *ped.* perficiet & singulis horis 27000 *ped.* id est, plus duobus milliaribus gallicis: tanta navis velocitas remigatione vix ac ne vix quidem obtineri potest.

Jam vero calculum alia hypothesi superstruam, quam rei nauticæ intelligentes non admodum improbaturos esse, confido: quadrat enim cum multis, quos ipse super mari feci, observationibus; supponam vela triremis perpendiculariter ad carinam expansa superficiem habere 1600 pedum quadratorum, hæcque ventum excipere directe impingentem, qui singulis minutis secundis spatium percurrat 18. *ped.* navem vero in eadem directione sic singulis minutis secundis spatium perficere 6 pedum. Ita ventus in vela incurret velocitate refpectiva 12 pedum: vim iftius venti æftimo = ponderi $\frac{9 \times 1600}{850}$ *ped. cub.* aquæ, feu fere 17. *ped. cub.* aquæ.

Hæc fi ita fint, fequitur navem ab elevatione aquarum 260. operariorum poffe ea velocitate propelli, qua fingulis minutis fecundis fpatium percurrat $6\frac{1}{2}$. pedum.

Æftimatio non admodum diverfa fequitur ex iis, quæ D. Chazelles habet in *Comm. Acad. Reg. Sc. Parif. ad ann.* 1702. *p.* 98. *edit Parif.* Ut vero recte ad inftitutum noftrum applicari poffint, notandum erit in remigatione, vim triremem propellentem non effe æftimandam ex preffione remigum in remos, fed ex preffione, quam remorum extremitates aquis fubmerfæ contra aquas exerunt. Ut hanc proxime definiamus, hæc prius erunt obfervanda. Remiges fuere adhibiti 260. totis viribus remigantes: fingulis minutis primis remorum impulfus (gallicè *palades*) facti funt 24: integra remorum agitatio tribus abfolvitur motibus, quos ejufdem durationis ponam, eorumque unus folus triremem promovet: hoc modo triremis velocitate fuit provecta, qua fingulis minutis fecundis fpatium $7\frac{1}{2}$. *ped.* abfolvebat, pars remi intra navem fuit 6. pedum & extra navem 12. pedum: fuperficies autem (gallicè *les pales*) omnium remorum, quæ contra aquas impelluntur, in unam collectæ D. Chazelles facit 130. pedum quadratorum: notavit porro extremitatem internam remi fingulis agitationibus fpatium defcribere fex pedum: & quia quævis agitatio tempore $\frac{60}{24}$. unius minuti fecundi abfolvitur fimulque ex tribus conftat motibus, quos pono tautochronos, apparet quamvis remi retractionem fieri tempore $\frac{20}{24}$. feu $\frac{5}{6}$. unius minuti fecundi & hoc tempore extremitas remi interna abfolvit fpatium 6. pedum. Porro ob longitudinem fuperficiei remorum, quæ contra aquas impellitur, non tota eft ad diftantiam 12. pedum cenfenda: illam igitur diftare ponam 10. pedibus, quafi nempe pars remi extra navem promineret 10. pedes longa: hujus partis extremitas defcribet 10. pedes tempore $\frac{5}{6}$ unius minuti fecundi: quia vero ipfa triremis velocitatem habet, qua eodem tempore fex pedes abfolvit, cenfendum eft, remorum extremitates contra aquam impelli velocitate refpectiva, qua tempore $\frac{5}{6}$. min. fec. 4. pedes defcribat: igitur vis triremem propellens eft æqualis vi, quam aqua contra fuperficiem 130. pedum quadratorum exereret, fi velocitate in illam incurreret, qua tempore $\frac{5}{6}$ *min. fec.* 4. *ped.* abfolvat: hanc vim fecundum vulgarem

garem æſtimationem invenio præter propter æqualem ponderi 40. *ped. cub.* aquæ; iſta vero vis non continue applicatur, ſed tantum eo tempore quo remi retrahuntur: ſunt igitur duo trientes iſtius vis auferendi, ita ut vis quæ triremem continue propellat, cenſenda denique ſit æqualis ponderi $13\frac{1}{3}$. *ped. cub.* aquæ.

Exinde ſequitur, ſi velocitates navis rationem ſequi ſubduplicatam virium propellentium ponantur, quod eadem hæc triremis pondere unius pedis cubici aquæ impulſa velocitatem habitura fuiſſet, qua poſſit ſingulis minutis ſecundis perficere proxime duos pedes; quæ hypotheſis eadem eſt, cum illa quam primo loco adhibuimus, ita ut rurſus exinde ſequatur triremem velocitatem ab iſta navigatione acquiſituram eſſe, qua poſſit perficere ſingulis minutis ſecundis $7\frac{1}{2}$ pedes, quæ velocitas tantillo major eſt illa, quæ triremi remigatione fortiſſima 260. remigum data fuit.

Rebus bene perpenſis hæſito, utrum navigationis genus ſit præferendum, an remigatio, an aquarum elevatio, ſucceſſum fere æqualem crediderim utriuſque, & pro certo affirmare audeo, ſi minus promoveatur navis ab aquarum elevatione, defectum parvum fore: fortaſſe autem promovebitur magis. Interim non dubito, quin nova iſta navigationis idea harum rerum ignaris vana & ridicula appareat. Ego vero aliter ſentio velimque ut animus porro ad ſequentia advertatur.

Primo. Quod aquæ in omni navium genere, ubi remi plane adhiberi nequeunt, commode elevari poſſunt, ita ut nova iſta navigatione naves etiam bellicæ prægraves, quibus in pugnis navalibus utuntur, deficiente omni vento, quo lubet agi poſſint.

Secundo. Quod ſic in theoria exemplum habetur, dari vires motrices ſive propellentes, quæ dici poſſunt intrinſecæ: Excitabuntur iſto exemplo ingenia ad excogitanda hujuſmodi alia motus principia eaque magis perficienda & ad navigationis uſum adhibenda.

Tertio. Quod multis modis ſublevari poteſt labor hominum in elevandis aquis ſecus atque fieri poteſt in remorum uſu: ſunt nempe res naturales inſigni & fere incredibili virtute præditæ eæque mediocri pretio comparandæ, quibus idem quod labore hominum effici poteſt: harum uſus præſertim brevibus trajectibus serena & tranquilla tempestate instituendis inservire posset. De virtute istiusmodi rebus naturalibus insita, de effectibus inde obtinendis horumque mensuris egi in Sect. X. §. 40. & sequentibus: imprimis autem velim ut attendatur ad §. 43. quo omnes quibus ingenium à natura datum fuit felix ad machinas excogitandas, excitari deberent ad rei istius perfectionem tentandam.

Quarto. Quod nonnulla alia compendia purè mechanica adhiberi possint similia illi quod §. 27. datum fuit, quorum nempe ope ab eodem labore effectus in promovendis navibus non parum crescit: Verum non licet jam secundum veram rei indolem omnia pertractare.

EXPERIMENTA

In Sectionem decimam tertiam.

UT vim repellentem experimento recte cognoscere liceat, adhiberi poterit vas quod habeat formam parallelopipedi ejusque pondus sumi tam vacui quam aqua pleni, posteaque indagari ratio inter amplitudinem vasis & amplitudinem foraminis, quod in latere vasis esse debet, sicut & ratio inter altitudines aquæ supra foramen & supra basin: Inde deducere licebit rationem inter pondus vasis aqua pleni & cylindri aquei foramini verticaliter superincumbentis. Porro ex observata amplitudine jactus habebitur velocitas aquæ: ex hac, si simul jungas quantitatem aquæ dato tempore effluentem pariter observandam, colliges amplitudinem venæ contractæ, quam comparare poteris cum amplitudine orificii.

His omnibus exploratis suspendatur vas ex filo prælongo adhibita simul cura, ut alium motum habere non possit, quam qui fit directioni aquarum effluentium contrarius. Tum demum aquis effluxus concedatur & observabitur filum situm verticalem deserere & ex angulo declinationis cognoscetur vis repellens eaque cum mensuris, quas indicavimus, comparari poterit.

Expe-

Experimentum 1.

Feci ipse aliquando omnia, ut nunc monui, visumque fuit regulam nostram §. 2. recte confirmari: non potui tamen tum temporis sufficiente accuratione experimentum instituere, nec illud postea repetii.

Experimentum 2.

Alio tempore rem aliter tentavi: vas nempe de quo omnes mensuras requisitas sumseram aqua plenum naviculæ imposui in puppi: navicula aquis in alveo innatabat: Deinde aquis ex vase effluentibus (ita tamen ut in naviculam non illiderent) navicula in plagam contrariam progressa est: velocitatem naviculæ ex spatio dato tempore percurso rectissime exploravi. Deinde inquisivi quantum pondusculum naviculæ esset appendendum, ut illo pondere sollicitata eandem velocitatem acquireret. Instituta deinde comparatione istius ponderis cum pondere cylindri aquei datæ diametri, inde rectissime theoriam nostram confirmari vidi.

Experimentum 3.

Effluentibus aquis ex vase naviculæ superimposito in naviculam, hæc omnino immota permansit: Id indicat impetum venæ aqueæ æqualem esse vi repellenti, ut demonstravi §. §. 16. & 17. Tum etiam si vena aquea directe impingebat in planum naviculæ affixum, hæc similiter immota stetit, quod rursus æqualitatem impetus & vis repellentis probat: at si vena oblique in planum incidebat, navicula quidem motum obtinuit sed lentiorem.

Denique si aquæ effluentes à navicula excipiebantur, ita ut orificium aquis in navicula stagnantibus esset submersum, similiter absque motu perstetit navicula, documento, quod eadem pressio à vena oriatur, sive fiat ut omnis ejus motus cohibeatur, sive ut ad angulum rectum declinetur, prouti demonstratum fuit §. 18. æqualitatem inter vim repellentem & vim venæ aqueæ perpendiculariter in planum incidentis plurimis aliis modis exactissime confirmavi. Hanc autem vim theoriæ nostræ conformem opinionique omnibus adhuc com-

communi contrariam experimento omni exceptione majori confirmavi, quod præſentibus D. Emanuele Kœnig, Patrueli meo Nicolao Bernoullio atque Patre meo in ædibus meis inſtitui tanta cum fiducia, ut acceptis omnibus menſuris, preſſionem venæ aqueæ, quanta futura eſſet, etſi nunquam antea à me capto experimento, omni præciſione prædixerim. Hæc omnia novis principiis mechanicis eruta communicavi cum Academia Scientiarum Petropolitana, cujus Commentariis aliquando inſerentur.

Experimentum 4.

Ut etiam oſtenderem falſitatem regulæ receptæ tum de vi repellente Fig. 86. tum de impetu aquarum, adhibui vas quale oſtendit Figura 86. inſtructum canali A B uniformis amplitudinis & incurvato, cujus directio in A erat horizontalis, in B verticalis: vidi vas plane non repelli horizontaliter; ergo per §. 14. falſa eſt regula, quæ ſimplici cylindro ibidem definito adhæret.

F I N I S.

Tab. I.

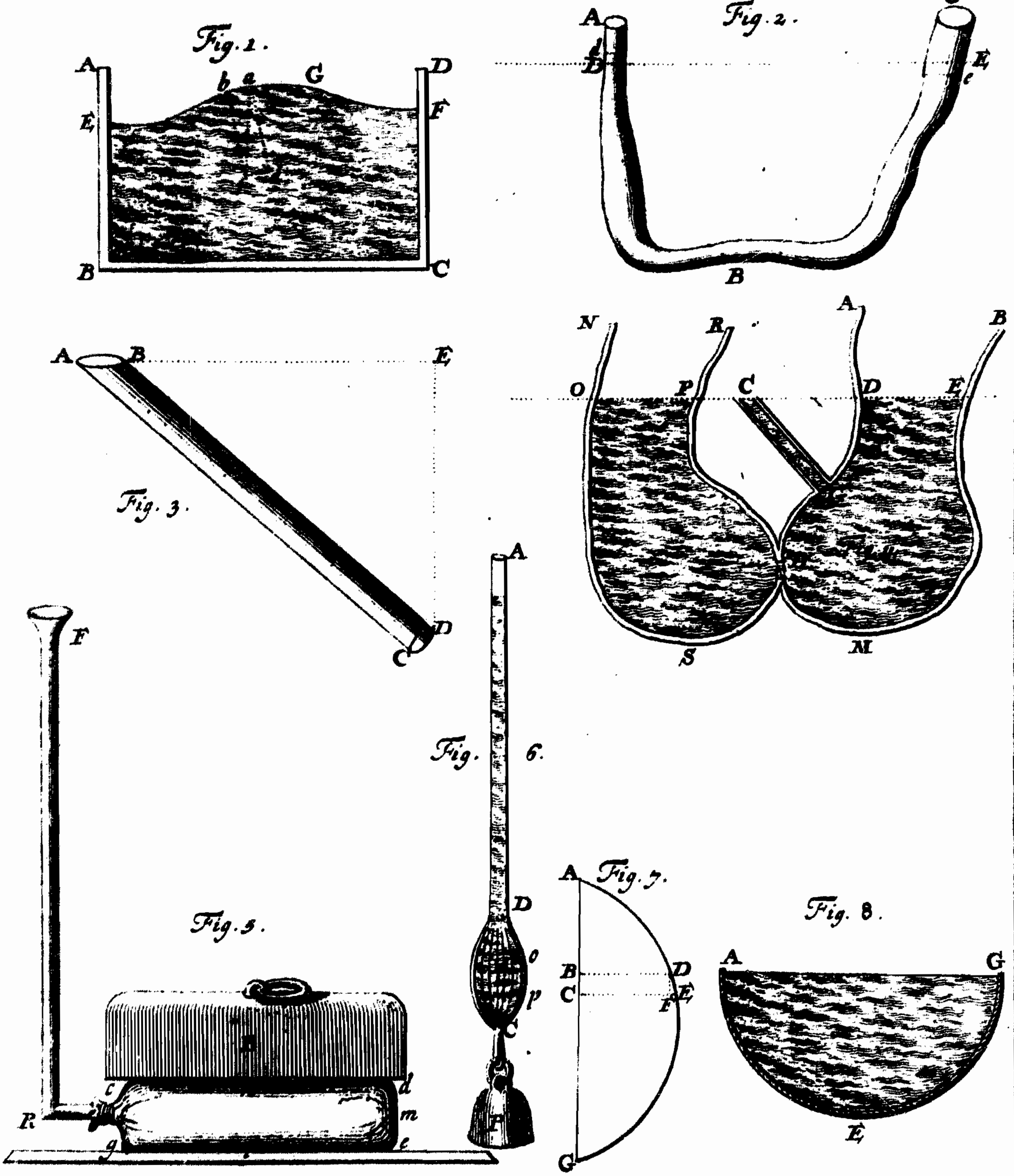
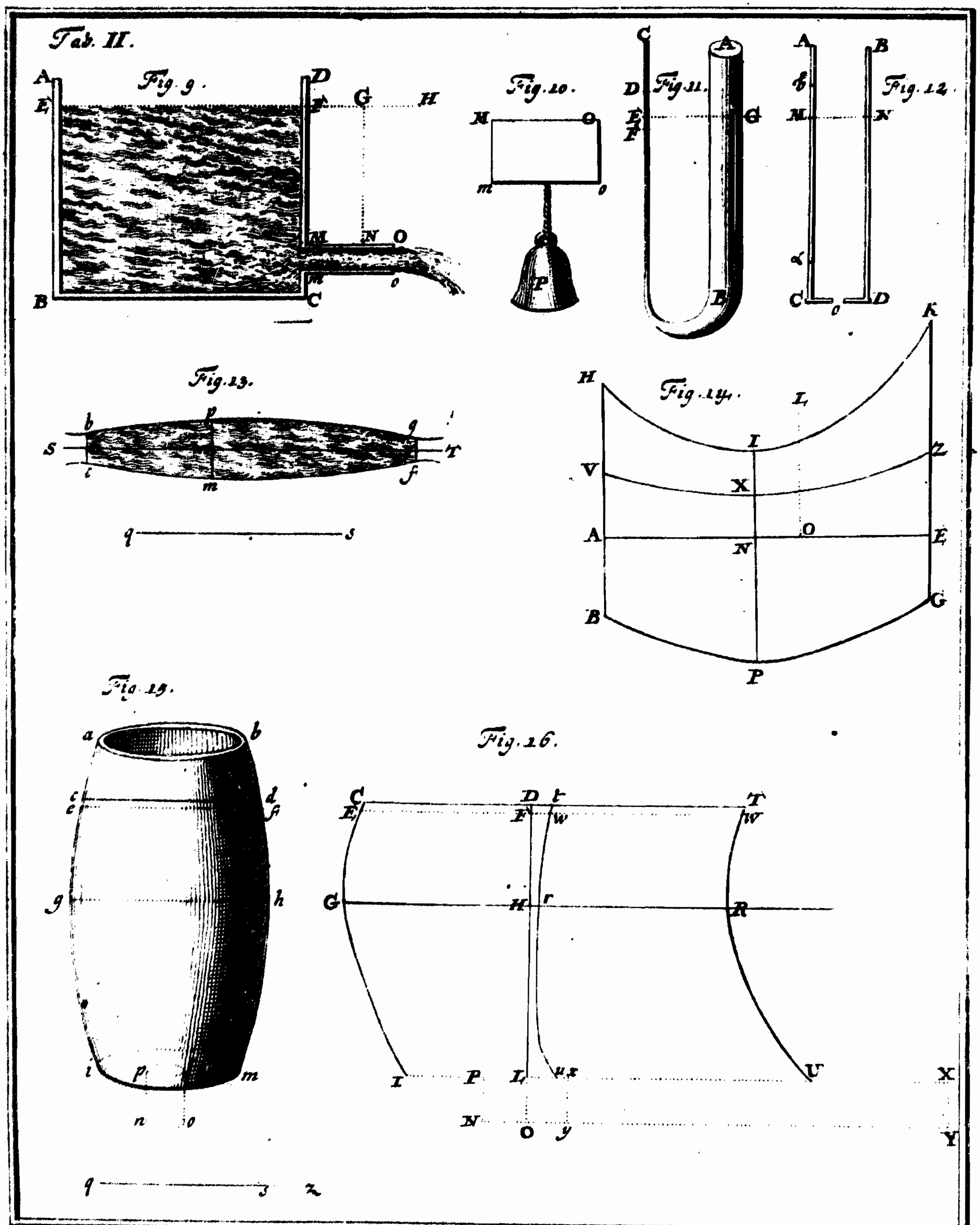
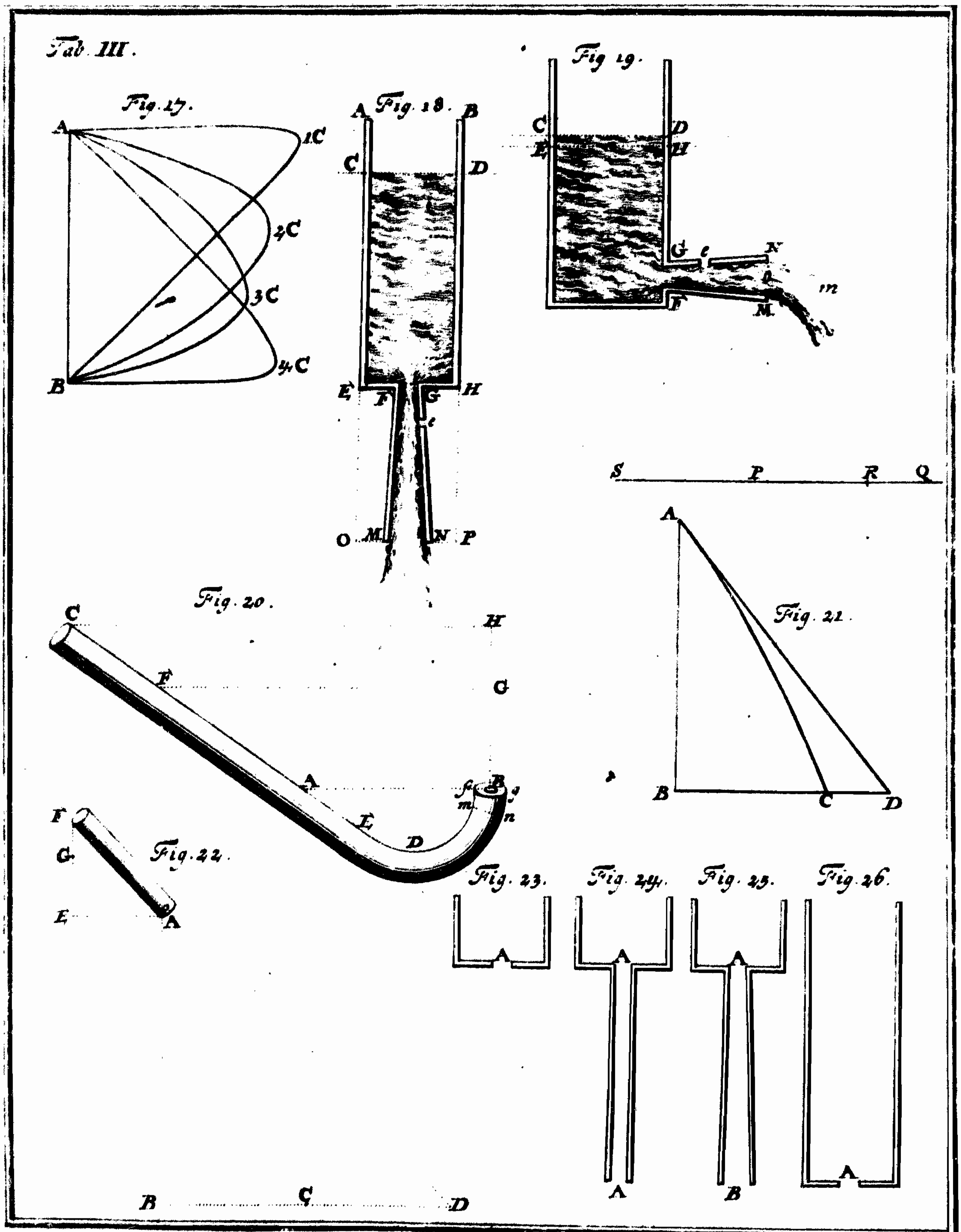


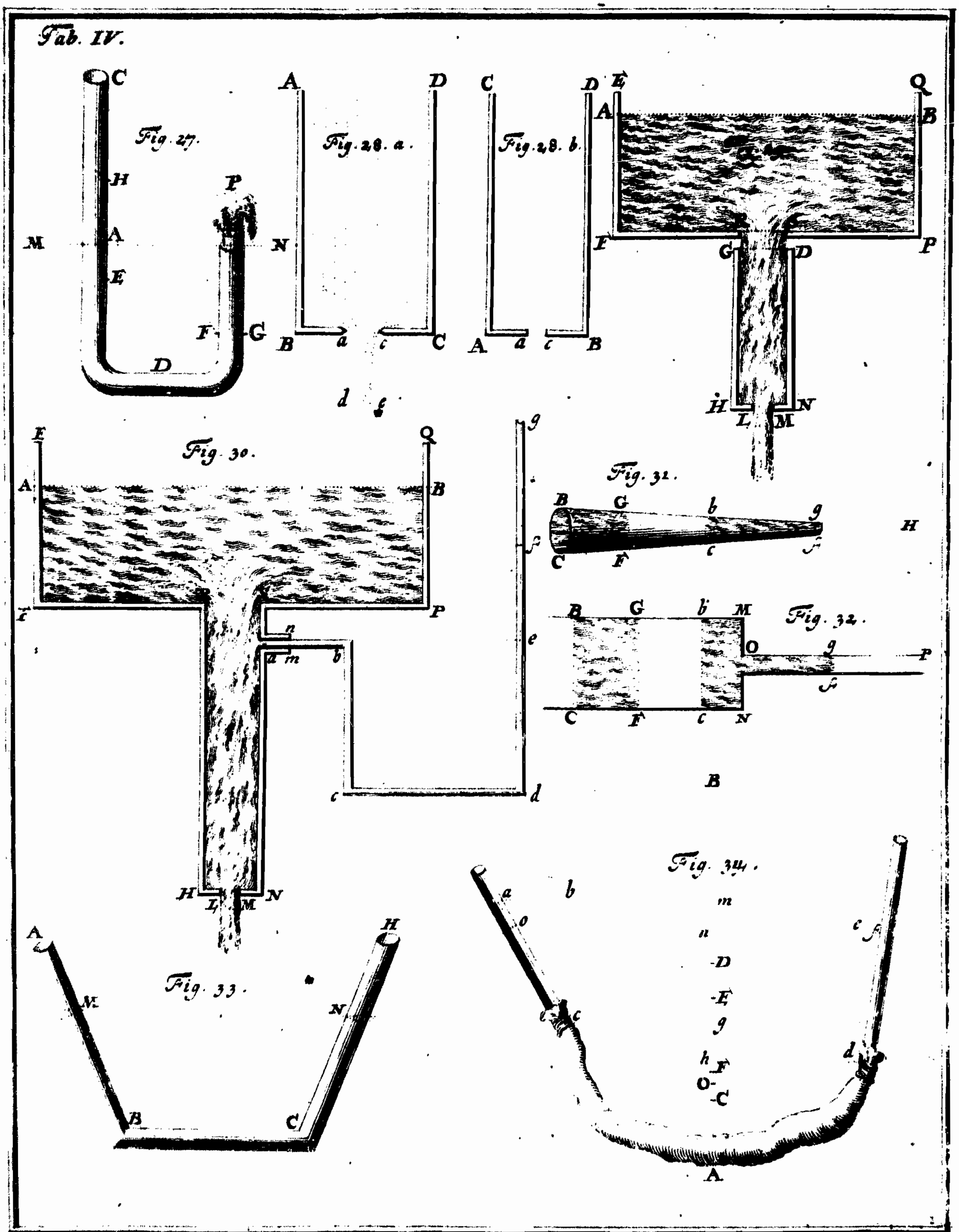
Fig. 1.
A D E F b a G B C
Fig. 2.
A C d D E e B
N R A B O P C D E S M
Fig. 3.
A B E C D
Fig. 6.
A D o p C
Fig. 5.
F R c d m g e
Fig. 7.
A B D C E F G
Fig. 8.
A G E



Weis sc.

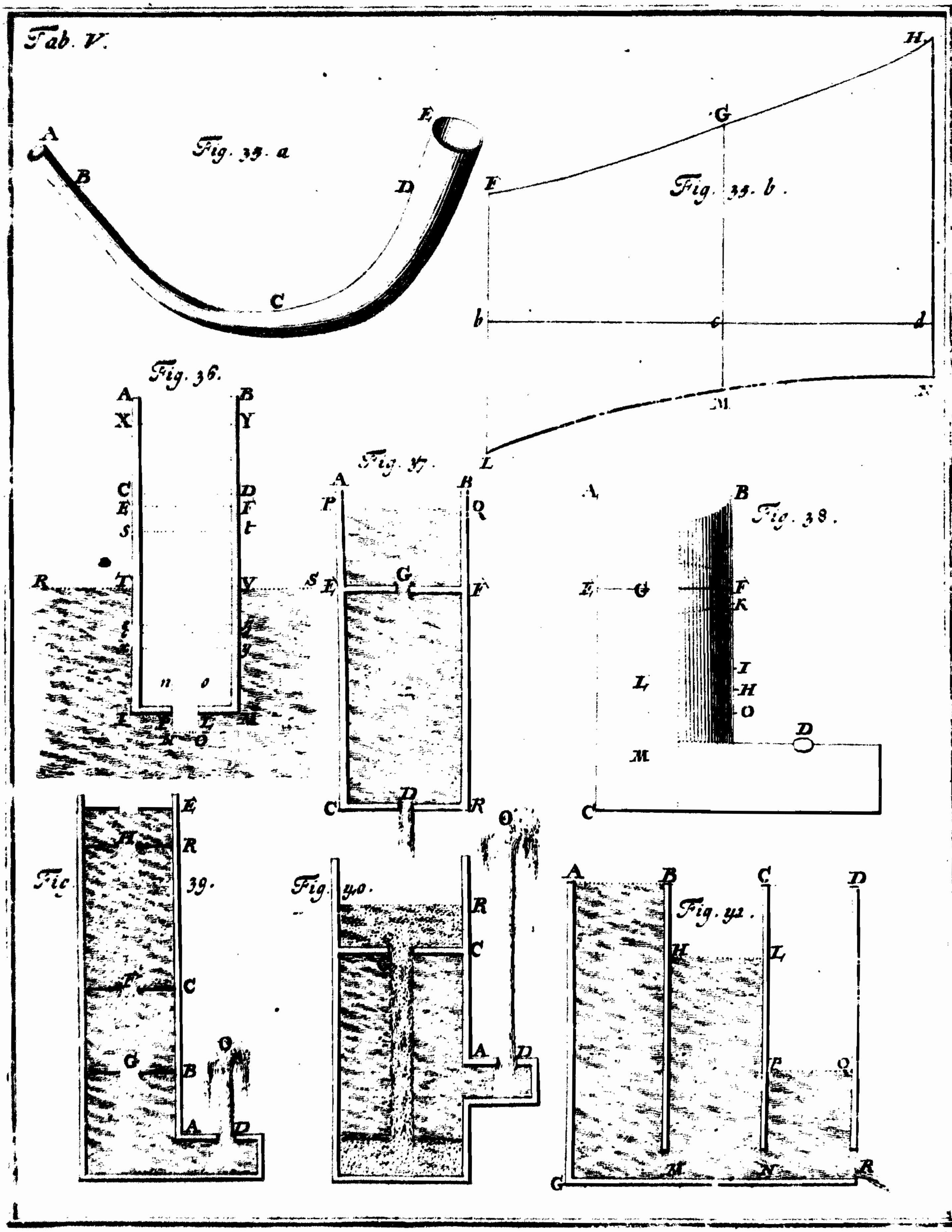

Tab. III.
Fig. 17.
A
B
1C
4C
3C
4C
Fig. 18.
A
B
C
D
E
F
G
H
t
O
M
N
P
Fig. 19.
C
D
E
H
G
t
N
o
m
F
M
S
P
R
Q
Fig. 20.
C
F
H
G
A
B
f
g
m
n
L
D
Fig. 21.
A
B
C
D
Fig. 22.
F
G
E
A
B
C
D
Fig. 23.
A
Fig. 24.
A
A
Fig. 25.
A
B
Fig. 26.
A

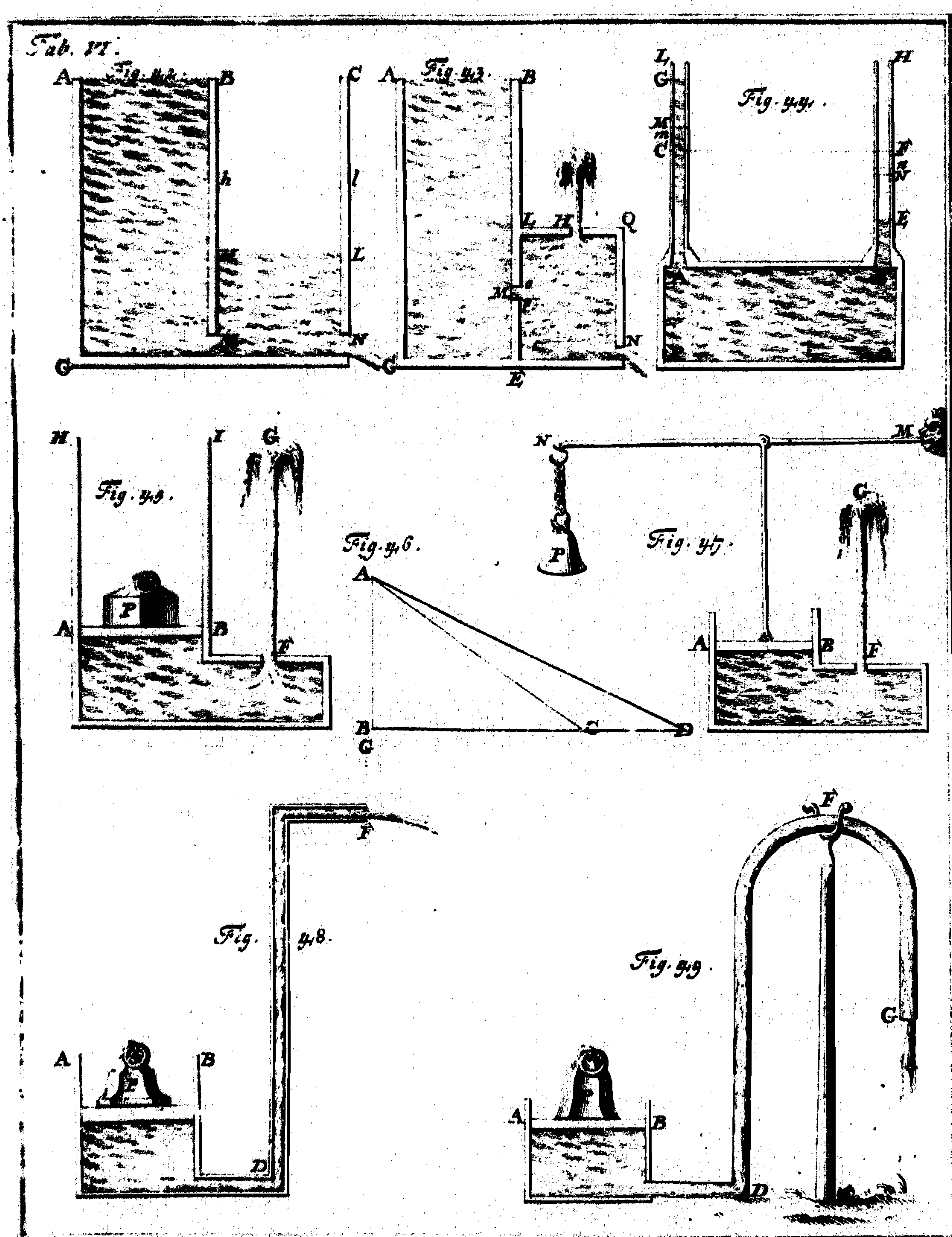
Weis sc.



Wris sc.

Tab. V.





Weis sc.

Tab. VII.

Fig. 30.

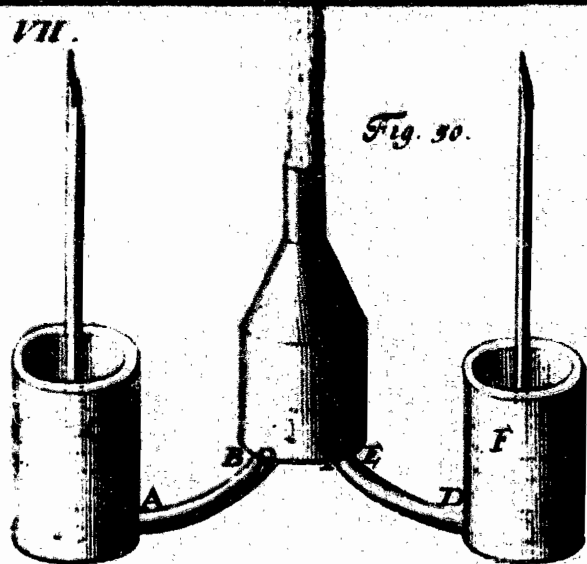


Fig. 31.

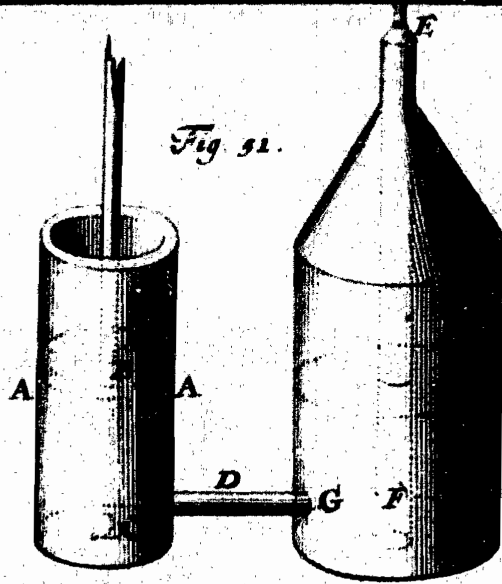


Fig. 32. (2)

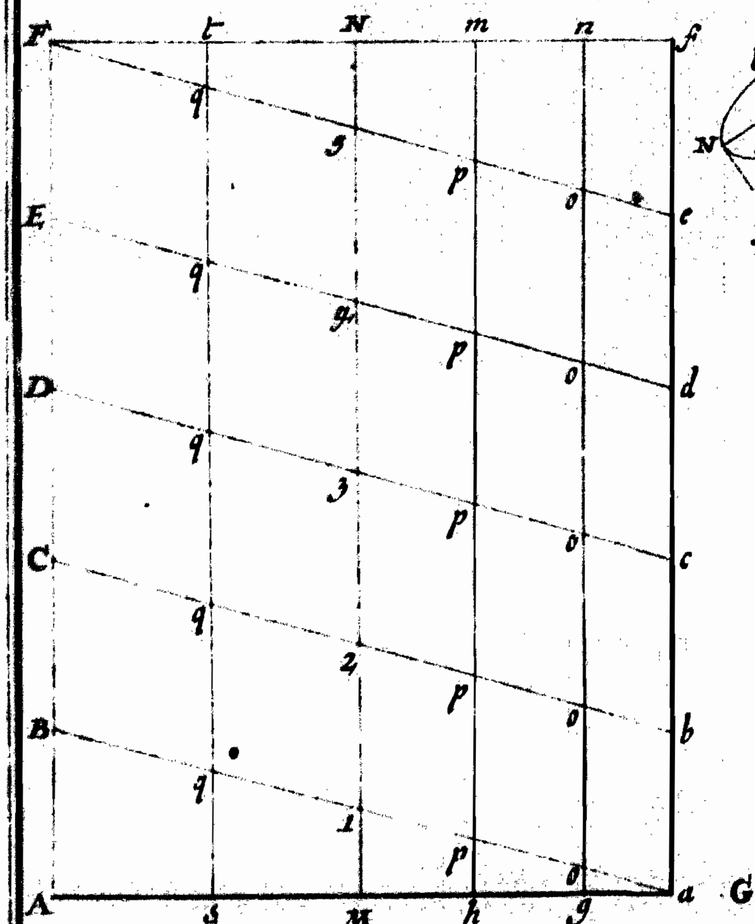
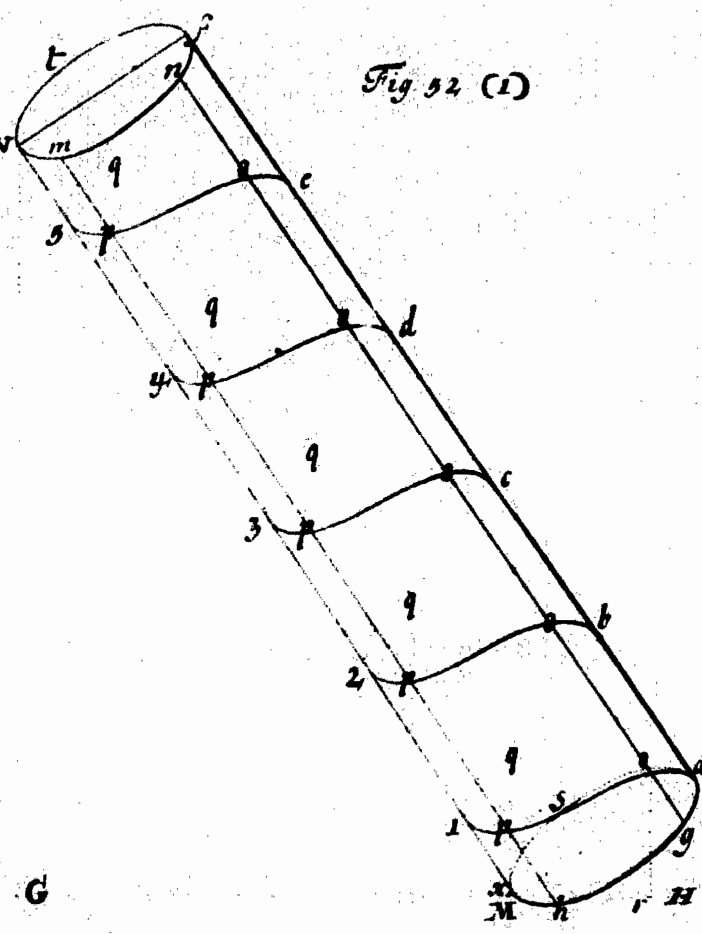
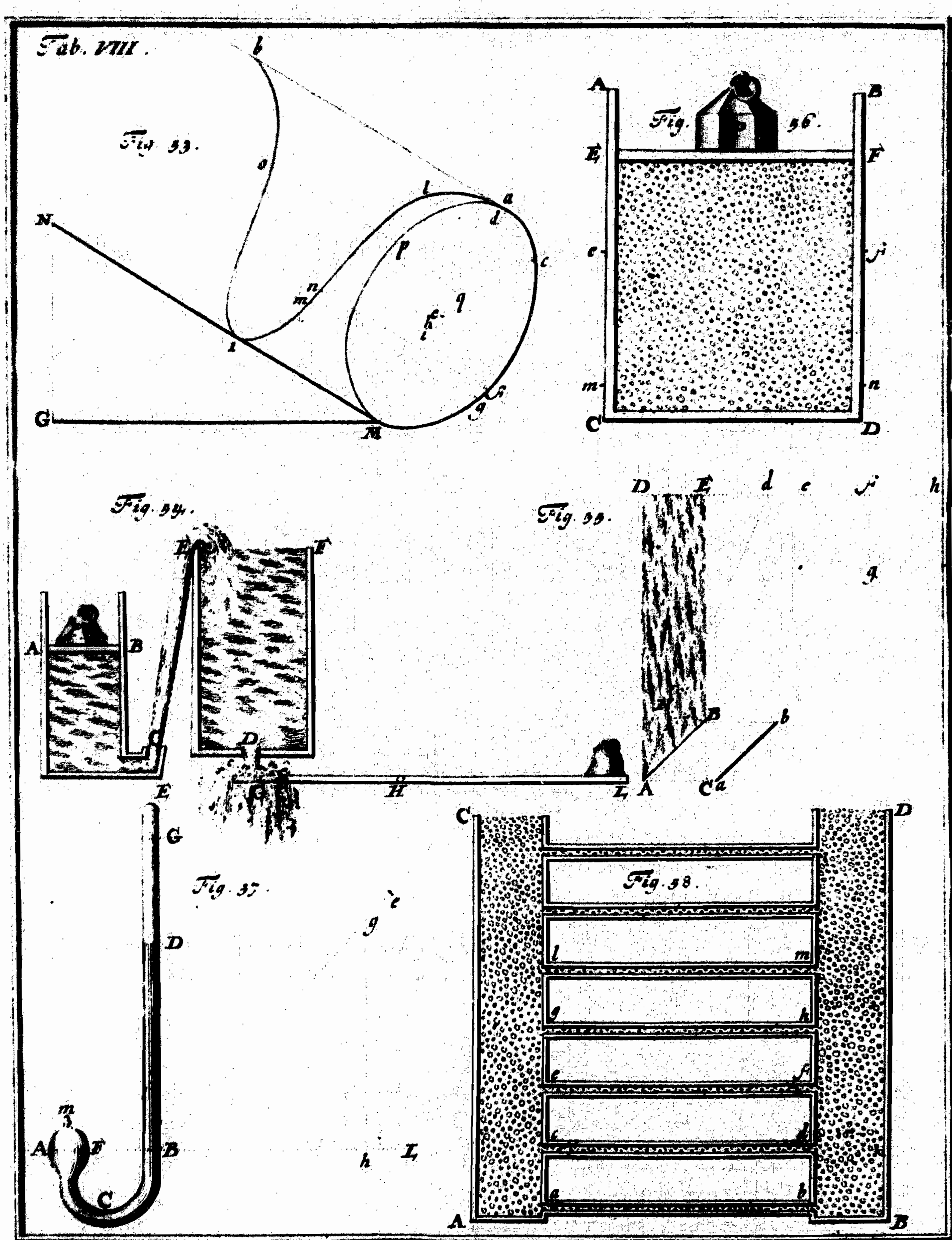
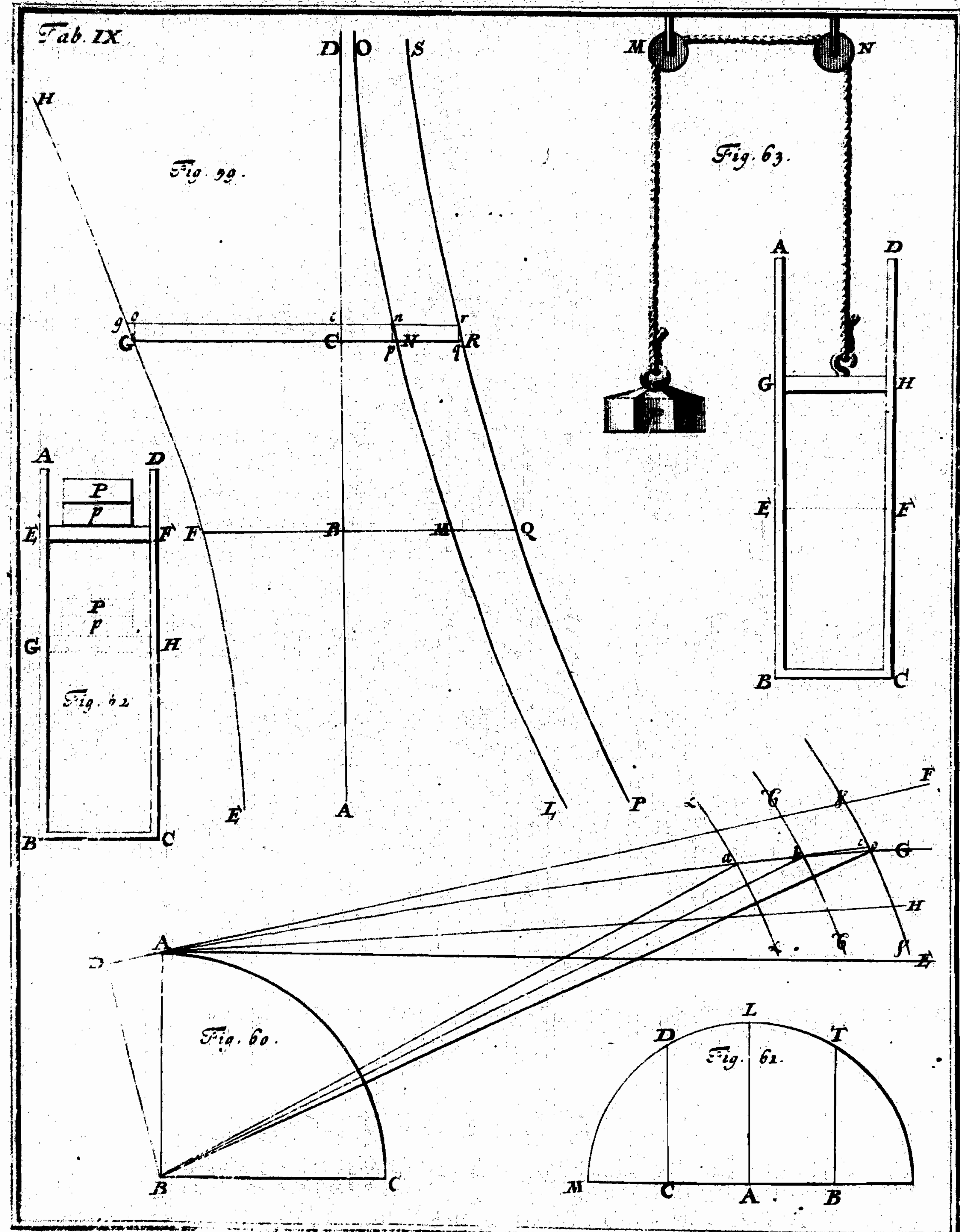


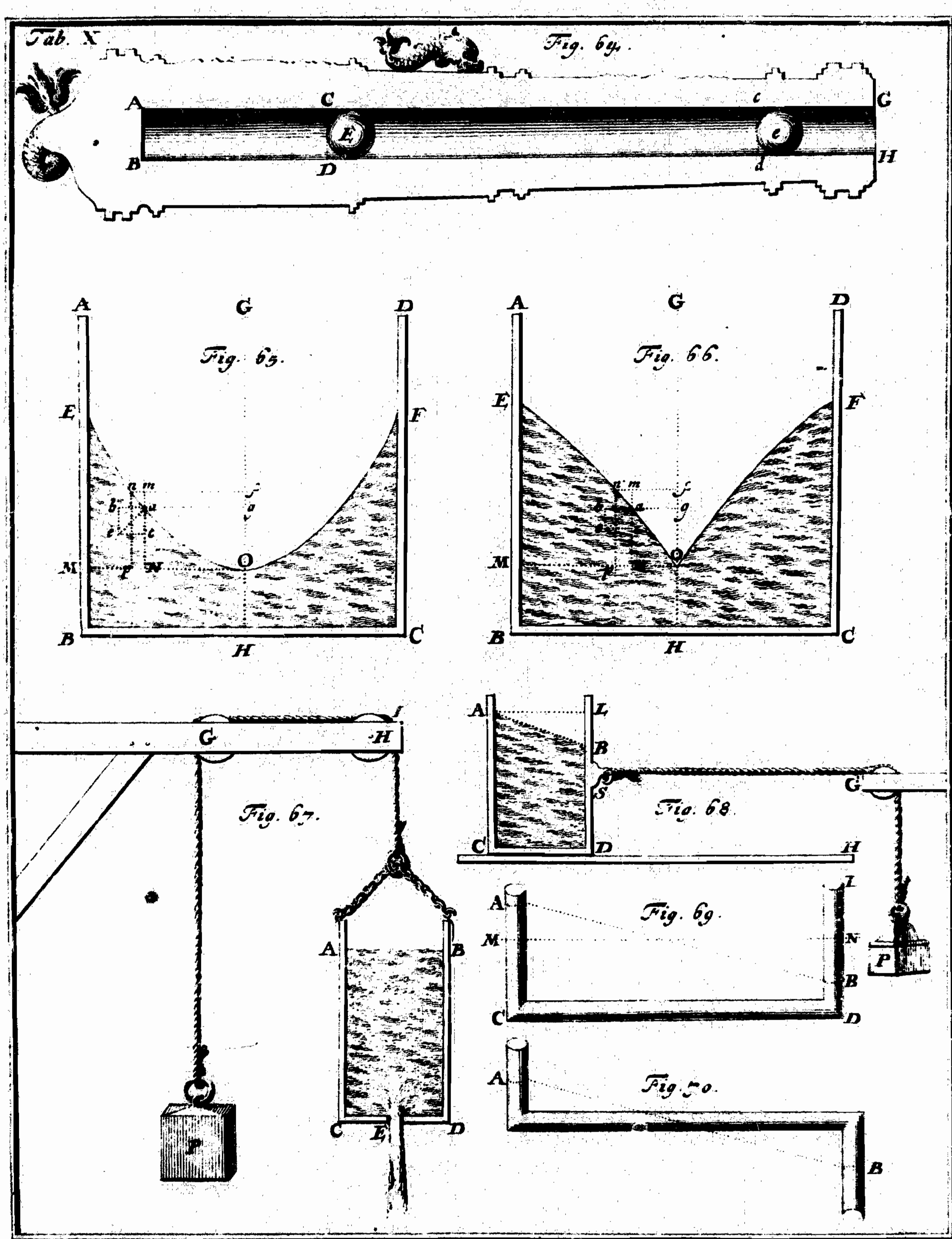
Fig. 32 (1)



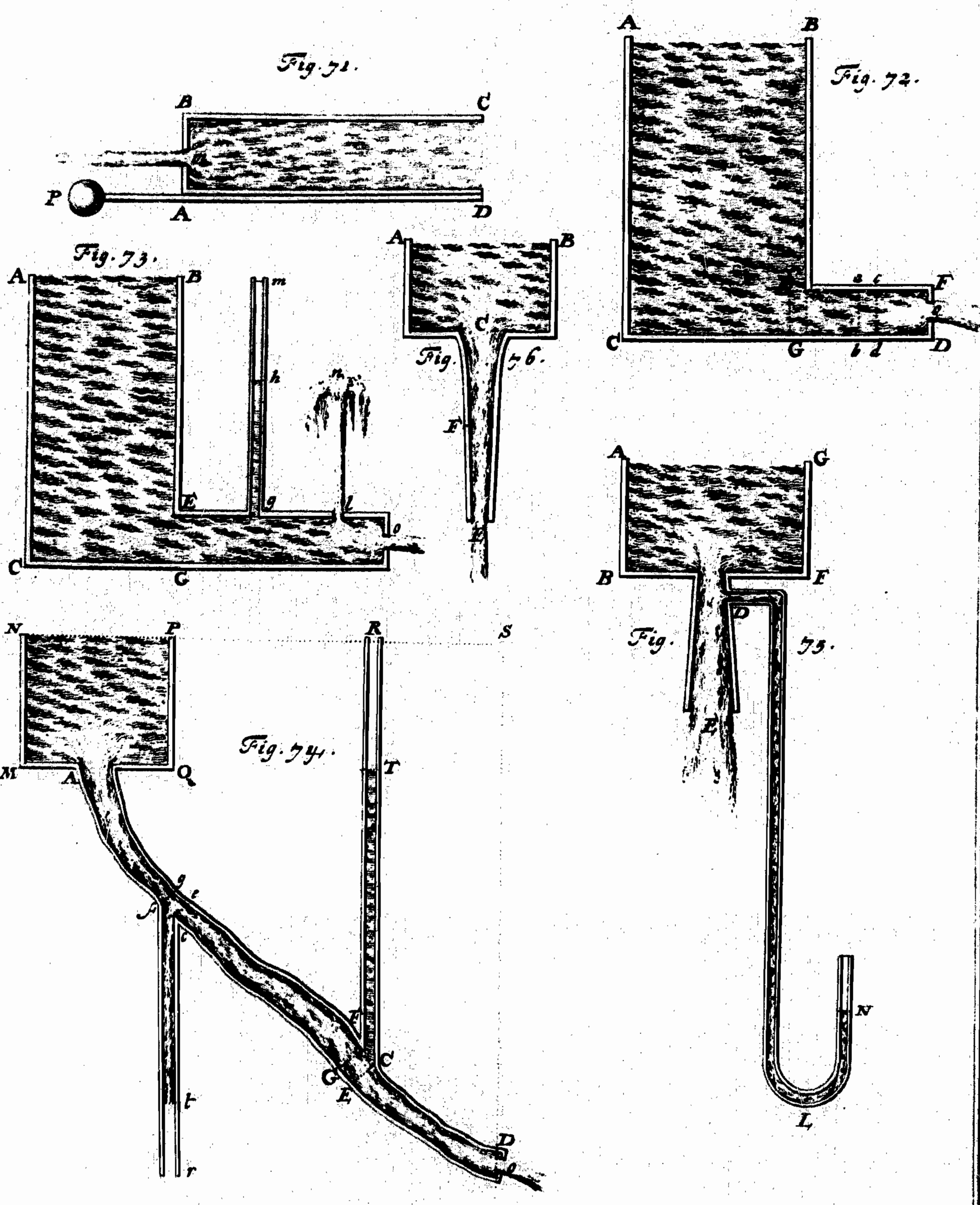

Tab. VIII.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.

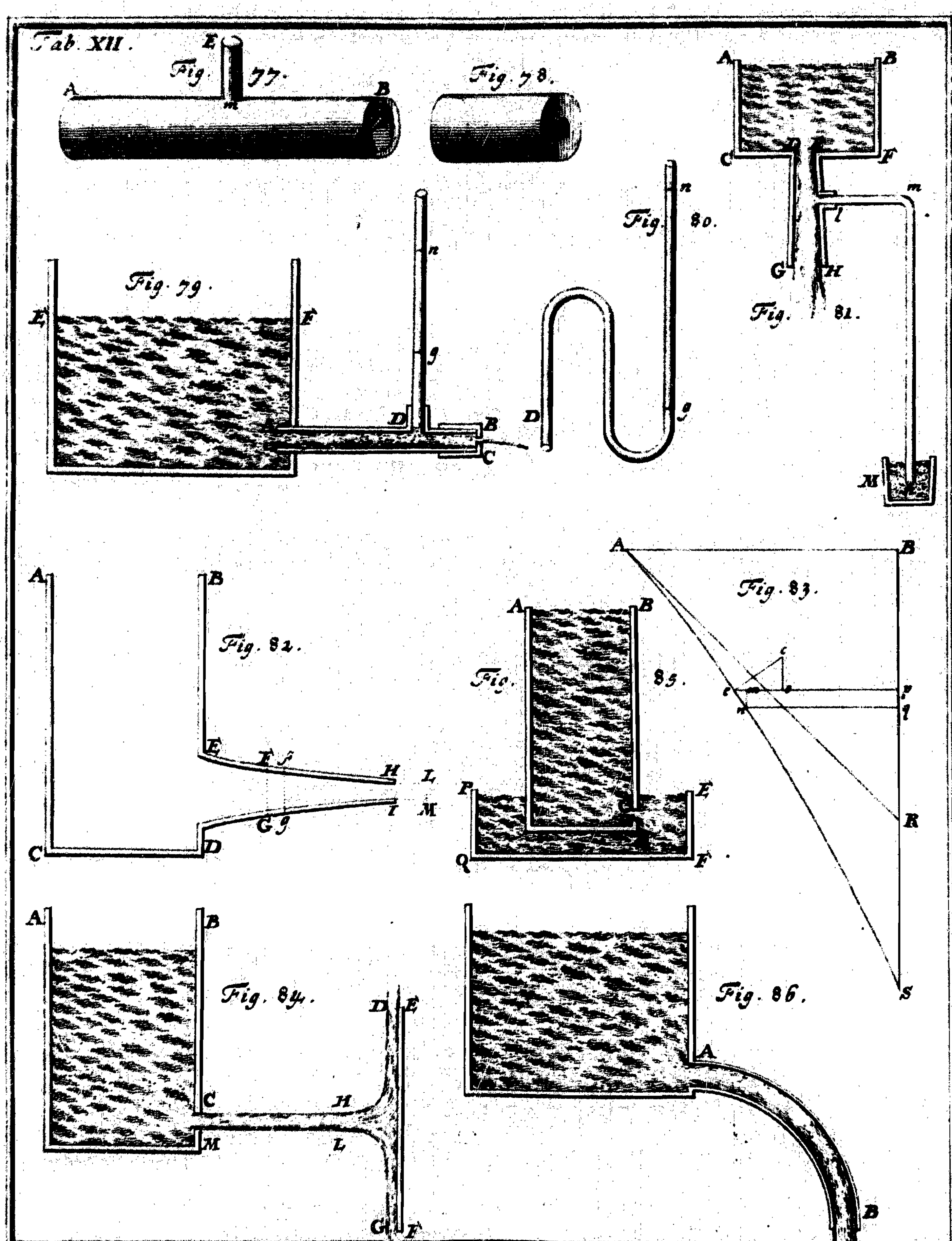


Weiss sc.


Tab. X
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.

Tab. XI.




Tab. XII.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 85.
Fig. 84.
Fig. 86.