

O INTRODUCERE ÎN GEOMETRIA MECANISMELOR

LIVIU I. NICOLAESCU

ABSTRACT. În această lucrare discutăm teorema de universalitate a lui Kempe legată de posibilele configurații ale unui mecanism plan.

CONTENTS

Introducere	1
1. Mecanisme plane	1
2. Puțină geometrie semi-algebrică	5
3. Reprezentarea aplicațiilor polinomiale cu ajutorul mecanismelor	9
4. Demonstrația teoremei de reprezentabilitate	12
References	16

INTRODUCERE

Un mecanism plan este un sistem de bare rigide îmbinate la capete. Barele se pot roti în jurul capetelor, dar unele din capetele lor pot avea o poziție fixă în plan. Spre deosebire de situația reală, permitem barelor să se intersecteze și în interiorul lor. Să ne imaginăm că într-unul din capetele barelor fixăm un stilou perpendicular pe plan după care deformăm mecanismul în toate modurile posibile. Stiloul va trasa o regiune în plan.

În aceasta lucrare dorim să investigăm problema inversă: dată fiind o regiune în plan, dorim să construim un mecanism plan astfel încât unul din vârfurile sale să traseze regiunea dată. Surprinzător, acest lucru este posibil pentru foarte multe regiuni, iar teorema de universalitate a lui Kempe descrie explicit care sunt aceste regiuni. Ele sunt regiunile semialgebrice, adică submulțimile din plan care pot fi descrise într-un număr finit de pași folosind egalități și inegalități polinomiale. Iată pe scurt organizarea lucrării.

În secțiunea 1 definim riguros noțiunea de mecanism plan și analizăm câteva exemple fundamentale pentru a înțelege subtilitățile problemei. Secțiunea 2 este ceva mai abstractă. Introducem puțin din limbajul geometriei algebrice reale și dăm o formulare riguroasă a teoremei de universalitate. Deși rezultatele menționate în această secțiune nu sunt necesare înțelegerii ideilor de bază din demonstrația teoremei de universalitate, am considerat că este foarte util să expunem cititorului un mod de gândire modern. În secțiunea 3 formulăm o teorema de reprezentabilitate și arătăm că implică teorema de universalitate. În secțiunea 4 demonstrăm teorema de reprezentabilitate. Surprinzător, demonstrația folosește numai niște idei elementare de geometrie euclidiană plană, teoria mulțimilor și algebra numerelor complexe.

1. MECANISME PLANE

Un *graf metric* este o pereche $\mathcal{M} = (G, \ell)$ unde G este un graf finit (fără muchii multiple și fără muchii care pornesc și se încheie în același vârf), iar ℓ este o funcție de la mulțimea E de muchii a lui G la mulțimea numerelor reale pozitive, $\ell : E \rightarrow (0, \infty)$. Funcția ℓ se numește *funcția lungime* sau *metrica*. Vom nota cu $V = V_G$ mulțimea de vârfuri.

Deorece o muchie este unic determinată de captele sale, vom identifica E cu o submulțime simetrică a lui $V \times V$, i.e., $(v_0, v_1) \in E \iff (v_1, v_0) \in E$.

În cele ce urmează vom identifica planul euclidian cu planul complex \mathbb{C} .

O *realizare geometrică* a unui graf metric $\mathcal{M} = (G, \ell)$ este o funcție $\zeta : V \rightarrow \mathbb{C}$ astfel încât

$$|\zeta(u) - \zeta(v)| = \ell(u, v), \quad \forall (u, v) \in E.$$

Un *mecanism plan (abstract)* este un quadruplu $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ unde

- (G, ℓ) este un graf metric,
- V_f este o submulțime a lui V_G ,
- $\phi : V_f \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție cu proprietatea că pentru orice pereche de puncte $u, v \in V_f$ unite printr-o muchie din E are loc egalitatea $|\phi(u) - \phi(v)| = \ell(u, v)$. Submulțimea V_f se numește submulțimea *punctelor fixe* a mecanismului.

O *realizare geometrică* sau *configurație* a unui mecanism plan $\mathcal{M} := (G, \ell, V_f, \phi)$ este o realizare geometrică $\zeta : V \rightarrow \mathbb{C}$ a lui (G, ℓ) astfel încât $\zeta|_{V_f} = \phi$. Notăm cu $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ mulțimea tuturor configurațiilor posibile ale mecanismului \mathcal{M} . Mulțimea $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ se mai numește și *spațiul de moduli* al mecanismului \mathcal{M} ,

Putem gândi o configurație ca o mulțime de puncte din plan (corespunzătoare vârfurilor V) unite prin bare liniare rigide (corespunzătoare muchiilor E) și de lungime prescrise de metrica ℓ . Aceste puncte se mai numesc și *încheieturile* mecanismului. Barele se mai numesc și *brațele* mecanismului. Ele se pot roti în jurul încheieturilor. Vârfurile din V_f se numesc *încheieturile fixe* ale mecanismului, iar încheieturile din $V \setminus V_f$ se numesc *încheieturile libere* sau *mobile*.

Punctele fixe sunt înțepenite în pozițiile lor inițiale descrise de funcția ϕ , dar punctele mobile se pot mișca în plan. Barele se pot intersecta și în interior. Când reprezentăm grafic o configurație a unui mecanism folosim simbolul \circ pentru a indica un vârf mobil și simbolul \bullet pentru a indica un vârf fix.

Exemplul 1.1 (Braț de robot). Să considerăm mecanismul din Figura 1.1 care constă din trei vârfuri a, b, c și trei muchii (a, b) și (b, c) . Vârful a este fix.

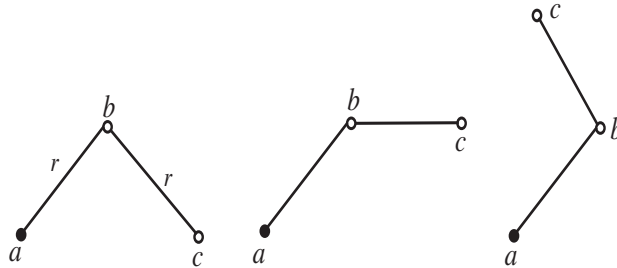


FIGURE 1.1. Diferite configurații ale unui mecanism simplu

Vedem că locul geometric al vârfului b este un cerc cu centrul în a . De îndată ce fixăm poziția lui b , vârful c mai are încă un grad de libertate: se poate roti pe un cerc cu centrul în vârful b . Cu alte cuvinte, pentru a determina o configurație a acestui mecanism trebuie mai întâi să precizăm poziția lui b , și apoi poziția lui c relativ b . Prin urmare, spațiul de configurații se poate identifica cu un produs cartezian de cercuri

$$\mathcal{C} = \{ (z_b, z_c) \in \mathbb{C}^2; |z_b| = \text{length}(a, b), |z_c| = \text{length}(b, c) \}.$$

Un astfel produs de două cercuri se numește tor de dimensiune 2. Îl putem vizualiza că o suprafața unei camere umflate de mașina. \square

Exemplul 1.2 (Paralelogramul cu o muchie fixa). Să considerăm un mecanism descris de muchiile unui dreptunghi $abcd$, în care vârfurile a și d sunt fixe. În Figura 1.2 am descris diferite configurații ale acestui mecanism. Lungimile muchiilor (a, d) și (a, b) sunt respectiv x și y .

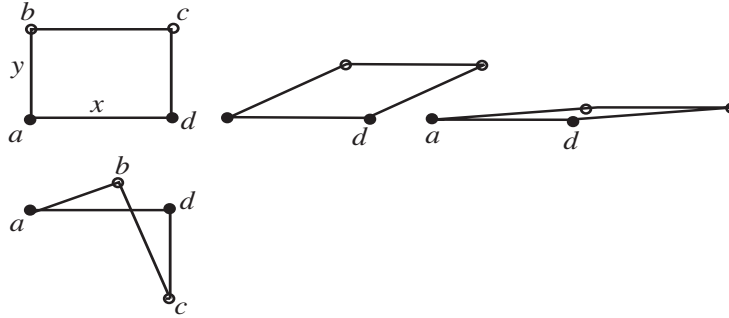


FIGURE 1.2. Diferite configurații ale unui paralelogram.

Observăm un fenomen interesant. Ultima configurație arată foarte diferit de primele trei. Se numește *contraparalelogramul* și nu se poate obține din primele trei printr-o deformare continuă. Spațiul de configurații \mathcal{C} are două componente: o componentă \mathcal{C}_+ conținând primele trei configurații din Figura 1.2 și o componentă \mathcal{C}_- conținând contraparalelogramul.

Fiecare din aceste componente se poate identifica cu cercul descris de vârful mobil b . Cele două cercuri au două puncte în comun care corespund la configurații în care punctele a, b, c, d sunt colineare. Punctele de intersecție sunt puncte *singulare* ale spațiului de configurații.

Putem modifica acest mecanism încât spațiul de configurații al noului mecanism este doar componenta \mathcal{C}_+ . Noul mecanism se numește *rigidizarea paralelogramului* și se obține printr-un artificiu numit *adaugarea unei proteze*. Acest proces este descris în Figura 1.3

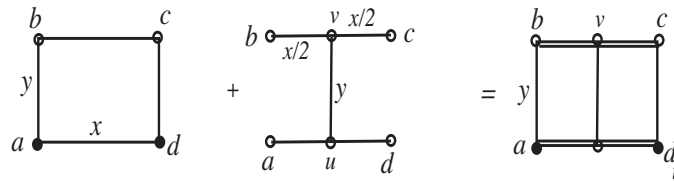
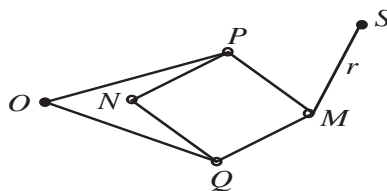


FIGURE 1.3. Rigidizarea unui paralelogram prin adaugarea unei proteze.

Noul mecanism are două noi vârfuri u și v , ambele mobile, care se află pe muchiile horizontale ale dreptunghiului din cauza modului în care am ales lungimile muchiilor protezei. Vedem că acest proces este echivalent cu adăugarea unei bare rigide de lungime y care unește mijloacele muchiilor verticale. Mijloacele devin încheieturi situate nu la capetele muchiilor, ci în interiorul lor. Noul braț vertical se poate roti în jurul acestor încheieturi. \square

Exemplul 1.3 (Inversorul lui Peaucellier). Este o construcție clasică de geometrie euclidiană familiară probabil multor cititori. Mecanismul plan cu acest nume este descris în Figura 1.4.

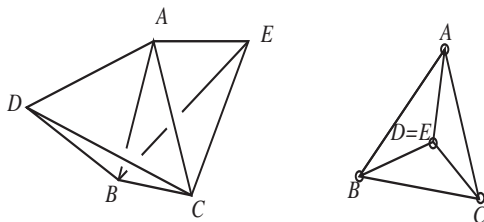
În aceasta figură, patrulaterul $PMQN$ este romb. Pentru a nu crea un contraromb îl rigidizăm cu ajutorul unei proteze ca în Exemplul 1.2. Obținem în acest fel *inversorul lui Peaucellier rigidizat*. Punctul M se mișcă pe cercul de centru S și rază r . În tratatul clasic de geometrie al lui J. Hadamard este arătat că punctul N se mișcă pe o dreaptă perpendiculară pe dreapta OS ; vezi [4, Teorema 241]. Mai precis, N este

FIGURE 1.4. *Inversorul lui Peaucellier.*

inversul lui M prin inversiunea de centru O și putere $|OP|^2 - |PM|^2$. Deoarece M se mișcă pe un cerc cu centrul în S , locul geometric al lui N este un segment de dreaptă. \square

Exemplul 1.4 (Mecanismul canonic). Să considerăm graful ilustrat în partea stângă a Figurii 1.5, unde metrica este dată de

$$\begin{aligned} \ell(A, B) = \ell(B, C) = \ell(C, A) &= 1, \\ \ell(D, A) = \ell(EA) = \ell(D, B) = \ell(E, B) = \ell(D, C) = \ell(E, C) &= \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

FIGURE 1.5. *Mecanismul canonic.*

Această metrică definește un mecanism abstract cu toate vârfurile libere pe care-l numim *mecanismul canonic*. Orice configurație a acestui mecanism arată ca în partea dreaptă a Figurii 1.5 în care ABC este un triunghi echilateral, iar ambele vârfuri D și E coincid cu baricentrul triunghiului. \square

Să presupunem că $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ este un mecanism plan cu mulțimea de vârfuri V . Fixăm un vârf $v \in V$. Pentru fiecare configurație $\zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ obținem un punct în plan $\zeta(v)$. Mulțimea

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}, v) := \{ \zeta(v) \in \mathbb{C}; \zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M}) \}$$

se numește *urma* vârfului v a mecanismului \mathcal{M} . Dacă de exemplu plasăm un stilou în acest vârf, și începem să mișcăm mecanismul în toate felurile posibile, atunci stiloul trasează o regiune în plan. Când vârfurile libere sunt fixate, urma lor constă dintr-un singur punct, $\phi(v)$.

În Exemplul 1.1 urma vârfului b este un cerc cu centrul în a . În Exemplul 1.3 urma vârfului N conține un segment de dreaptă. În Exemplul 1.4 urma vârfului D este întreg planul.

În această lucrare dorim să adresăm următoarea întrebare.

Care mulțimi plane sunt urme ale unui vârf liber al unui mecanism?

Răspunsul surprinzător la această întrebare este conținut în teorema de universalitate a lui Kempe. Folosind un limbaj familiar unui cititor din secolul 21 putem oferi o primă formulare a acestei teoreme: orice mulțime plană care se poate vizualiza pe un ecran de calculator este urma unui vârf liber al unui mecanism. Matematicianul american Bill Thurston a formulat teorema acesta în termeni și mai concreți: pentru orice semnătură se poate găsi un mecanism care să o traseze.

Formularea precisă a teoremei necesită puțină terminologie din geometria algebrică reală pe care o vom introduce în secțiunea următoare.

2. PUȚINĂ GEOMETRIE SEMI-ALGEBRICĂ

Definiția 2.1. Numim *mulțime algebrică (reală)* o submulțime a unui spațiu euclidian \mathbb{R}^n descrisă de un sistem de ecuații polinomiale în n variabile. Mai exact, o submulțime S a unui spațiu euclidian \mathbb{R}^n se numește algebrică dacă există polinoame $P_1, \dots, P_\nu \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ astfel încât

$$S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n; P_1(\vec{x}) = \dots = P_\nu(\vec{x}) = 0 \}. \quad \square$$

Exemplul 2.2. (a) Un plan în spațiu este o mulțime algebrică. De asemenea, un cerc în plan sau o sferă în spațiu sunt mulțimi algebrice.

(b) Orice intersecție finită¹ de mulțimi algebrice în \mathbb{R}^n este o mulțime algebrică în \mathbb{R}^n . În particular, o dreaptă în spațiu este o mulțime algebrică deoarece este intersecție de plane.

(c) Dacă S este o submulțime algebrică a lui \mathbb{R}^n descrisă de ecuațiile

$$P_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = P_\nu(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad P_1, \dots, P_\nu \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n],$$

atunci S poate fi privită și ca submulțime algebrică a spațiului euclidian \mathbb{R}^{n+1} descrisă de ecuațiile

$$x_{n+1} = P_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = P_\nu(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad P_1, \dots, P_\nu \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n].$$

Din acest motiv, putem fi ceva mai vagi în a preciza spațiul euclidian ambient al unei mulțimi algebrice. \square

Definiția 2.3. O aplicație $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ descrisă de

$$\mathbb{R}^m \ni (u_1, \dots, u_m) \mapsto (v_1(u_1, \dots, u_m), \dots, v_n(u_1, \dots, u_m)) \in \mathbb{R}^n$$

se numește o *aplicație polinomială reală* dacă fiecare din componentele $v_k(u_1, \dots, u_m)$ este polinom cu coeficienți reali în variabilele (u_1, \dots, u_m) . \square

Convenție. În cele ce urmează vom identifica spațiul euclidian complex \mathbb{C}^n cu spațiul euclidian real \mathbb{R}^{2n} în felul următor. Punctul $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ îl identificăm cu punctul $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, unde

$$z_k = x_k + iy_k, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Să observăm că inelul de polinoame $\mathbb{R}[x_j, y_k; 1 \leq j, k \leq n]$ se poate identifica cu un subinel al inelului de polinoame cu coeficienți complexi în variabile $z_j, \bar{z}_k, 1 \leq j, k \leq n$.

Conform Exemplului 2.2(c), orice mulțime algebrică reală poate fi gândită ca o submulțime algebrică reală a unui spațiu \mathbb{C}^n identificat ca mai sus cu spațiul real \mathbb{R}^{2n} . Lăsăm în grija cititorului demonstrația următorului rezultat.

Propoziția 2.4. Dacă $S \subset \mathbb{C}^n$ este o submulțime algebrică reală atunci există o aplicație polinomială reală $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ astfel încât $S = F^{-1}(0)$. Mai mult, putem alege aplicația F încât $m = 1$. \square

Propoziția 2.5. Spațiul de configurații al unui mecanism $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ se poate identifica natural cu o mulțime algebrică reală.

¹Folosind teorema bazei lui Hilbert se poate arată că orice intersecție, finită sau infinită, de submulțimi algebrice este o submulțime algebrică.

Demonstrație. Să presupunem că mulțimea de vârfuri a lui \mathcal{M} este $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Notăm cu E mulțimea de muchii a lui G .

Putem identifica orice configurație $\zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ cu un punct $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, unde $z_k = \zeta(v_k)$, $\forall k = 1, \dots, n$. Pentru fiecare muchie $e = (v_j, v_k)$ a lui G notăm cu P_e polinomul

$$P_e = (z_j - z_k)(\bar{z}_j - \bar{z}_k) - \ell(e)^2 = |z_j - z_k|^2 - \ell(e)^2 \in \mathbb{R}[\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{=: \vec{x}}, \underbrace{y_1, \dots, y_n}_{=: \vec{y}}].$$

Atunci $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ se poate identifica cu mulțimea zerourilor comune polinoamelor P_e , $e \in E$. \square

Definiția 2.6. O mulțime semialgebrică este o submulțime S a unui spațiu euclidian \mathbb{R}^n care se poate scrie ca o reuniune finită $S = S_1 \cup \dots \cup S_\nu$, unde fiecare din mulțimile S_j este descrisă de un sistem finit de inecuații polinomiale. \square

Exemplul 2.7. (a) Orice mulțime algebrică este semialgebrică. Într-adevăr, dacă $S \subset \mathbb{R}^n$ este descrisă de ecuațiile

$$P_1(\vec{x}) = \dots = P_\nu(\vec{x}) = 0, \quad P_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n],$$

atunci se poate descrie și de sistemul de inecuații

$$P_i(\vec{x}) \geq 0, \quad P_i(\vec{x}) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

(b) Un semispațiu, sau un semiplan sunt mulțimi semialgebrice. De asemenea, discul închis de rază 1 cu centrul într-un punct (x_0, y_0) din plan este submulțime semialgebrică întrucât este descris de inecuația polinomială

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq 1.$$

(c) Orice reuniune sau intersecție finită de submulțimi semialgebrice ale lui \mathbb{R}^n este o submulțime semialgebrică.

(d) Complementul unei submulțimi algebrice a lui \mathbb{R}^n este o submulțime algebrică a lui \mathbb{R}^n .

(e) Mulțimea Cantor de pe axa reală nu este semi-algebrică. În general, o mulțime care necesită o infinitate de pasi pentru a o descrie are o șansă foarte mică să fie semialgebrică. \square

Exercițiul 2.8. Demonstrați afirmațiile (c) și (d) din Exemplul 2.7. \square

Urmatorul rezultat este foarte profund și ne permite construcția multor exemple netriviiale de mulțimi semialgebrice.

Teorema 2.9 (Tarski-Seidenberg). *Dacă $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ este submulțime semialgebrică, iar π este proiecția canonică, $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, atunci $\pi(S)$ este o submulțime semialgebrică.* \square

Demonstrarea acestei teoremei este elementară dar foarte delicată. Pentru detalii și mai multe informații despre mulțimile semialgebrice trimitem la cursul [2] care se poate găsi și pe Internet.

Observația 2.10. Teorema lui Tarski și Seidenberg este cunoscută în literatura matematică și sub numele de *teorema de eliminare a cuantificatorilor*. Să explicăm rațiunea din spatele acestei terminologii.

Mulțimea $\pi(S)$ se poate descrie cu ajutorul cuantificatorului existențial \exists în felul următor

$$\pi(S) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n; \exists \vec{y} \in S \}.$$

Teorema lui Tarski-Seidenberg ne spune că există o colecție $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_\nu$ de submulțimi finite de polinoame în variabilele \vec{x} astfel încât

$$\pi(S) = \bigcup_{k=1}^{\nu} \underbrace{\left(\bigcap_{P \in \mathcal{P}_k} \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n; P(\vec{x}) \geq 0 \} \right)}_{A_k} = \bigcup_{k=1}^{\nu} A_k.$$

Descrierea de mai sus nu utilizează nici un cuantificator, de unde și numele de *eliminarea cuantificatorilor*.

Pentru a aprecia puterea acestei teoreme, considerăm spațiul euclidian \mathbb{R}^{n+1} în care coordonatele sunt notate cu (c_0, \dots, c_{n-1}, x) . Pentru simplitate notăm $\vec{c} := (c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ și definim

$$P_{\vec{c}}(x) := c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{R}[x].$$

Să considerăm mulțimea algebrică

$$Z = \{ (\vec{c}, x \in \mathbb{R}^{n+1}; c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0 \} = \{ (\vec{c}, x \in \mathbb{R}^{n+1}; P_{\vec{c}}(x) = 0 \}.$$

Dacă $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ este proiecția canonică $(\vec{c}, x) \mapsto \vec{c}$, atunci $\pi(Z)$ se poate indentifica cu mulțimea polinoamelor de grad n cu coeficienți reali care au cel puțin o radacină reală,

$$\pi(Z) = \{ \vec{c} \in \mathbb{R}^n; \exists x \in \mathbb{R} : P_{\vec{c}}(x) = 0 \}.$$

Teorema Tarski-Seidenberg ne spune că $\pi(Z)$ este submulțime semialgebrică și deci se poate scrie ca o reuniune finită $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_\nu$, unde fiecare din mulțimile Z_k constă din soluțiile unui sistem finit de inecuații polinomiale în n variable.

Cu alte cuvinte, pentru a decide dacă un polinom de grad n cu coeficienți reali \vec{c} are o radacină reală este suficient să arătăm că vectorul coeficienților \vec{c} este soluție a unuia din sistemele polinomiale care definesc mulțimile Z_k .

Din cauza teoremei Tarski-Seidenberg, geometria semialgebrică are o legătură strânsă cu logica matematică.² Matematicienii descriu diferitele mulțimi folosind operatorii logici \vee (= SAU), \wedge (= ȘI), \neg (= NEGAȚIE) precum și cuantificatorii \exists și \forall . Operatorii logici \vee , \wedge , \neg corespund operațiilor booleene de reuniune, intersecție și complement. După cum am văzut, cuantificatorul \exists se traduce în teoria mulțimilor prin construcția imaginii unei mulțimi dintr-un produs cartezian via una din proiectile canonice ale produsului. De exemplu, dacă $S \subset A \times B$ atunci mulțimea

$$\{ x \in A; \exists y \in B; (x, y) \in S \}$$

este coincide cu $\pi_A(S)$, unde $\pi_A : A \times B \rightarrow A$ este proiecția canonică, $(a, b) \mapsto a$.

Cuantificatorul \forall se poate exprima folosind cuantificatorul \exists și operatorul negație. Să considerăm de exemplu mulțimea

$$M = \{ x \in A; \forall y \in B, (x, y) \in S \}.$$

Un logician ar spune că mulțimea M este definită de formula

$$x \in A : \forall y \in B, (x, y) \in S,$$

adică M constă din acei x pentru care formula de mai sus este adevărată. Atunci

$$A \setminus M = \{ x \in A; \exists y \in B, (x, y) \in (A \times B) \setminus S \} = \pi_A((A \times B) \setminus S),$$

și deci

$$M = A \setminus \pi_A((A \times B) \setminus S).$$

Putem descrie M prin următoarea formulă

$$x \in A : \neg \left(\exists y \in B, \neg((x, y) \in (A \times B)) \right).$$

Din observațiile de mai sus deducem următorul principiu extrem de folositor.

Orice formula în care apar doar operatorii \vee, \wedge, \neg , cuantificatorii \exists, \forall și mulțimi semialgebrice definește o submulțime semialgebrică.

Iată o simplă aplicație a acestui principiu. Să considerăm o mulțime semialgebrică $S \subset \mathbb{R}^n$. Atunci mulțimea

$$x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, \exists s \in S : |x - s|^2 < \varepsilon^2 \tag{2.1}$$

²Alfred Tarski, unul din autorii acestei teoreme, a fost unul din cei mai iluștri logicieni ai secolului 20.

este o mulțime semialgebrică deoarece mulțimile $\{\varepsilon > 0\}$ și

$$\{(x, s, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; |x - s|^2 < \varepsilon^2\}$$

sunt semialgebrice. Pe de altă parte, este clar că mulțimea din (2.1) este tocmai închiderea lui S . Deducem că dacă S este submulțime semialgebrică, atunci și închiderea ei este semialgebrică. \square

Să reamintim o notație din teoria mulțimilor. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci B^A este mulțimea de funcții $A \rightarrow B$. De exemplu, dacă avem o mulțime $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ atunci $\mathbb{C}^V = \mathbb{C}^n$.

Să presupunem că $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ este un mecanism plan cu mulțimea de vârfuri V . Atunci spațiul de configurații $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ este o submulțime algebrică în spațiul euclidian \mathbb{C}^V . Să observăm că pentru orice vârf $v \in V$ avem o proiecție canonică $\pi_v : \mathbb{C}^V \rightarrow \mathbb{C}$ dată de

$$\mathbb{C}^V \ni \zeta \mapsto \pi_v(\zeta) := \zeta(v) \in \mathbb{C}.$$

Observăm că urma unui vârf v se poate descrie prin egalitatea $\mathcal{C}(\mathcal{M}, v) = \pi_v^{-1}(\mathcal{C}(\mathcal{M}))$. Folosind teorema Tarski-Seidenberg deducem următorul rezultat.

Corolarul 2.11. *Urma unui vârf liber a unui mecanism este o submulțime semialgebrică a planului.* \square

Putem acum oferi un enunț mult mai precis al teoremei de universalitate.

Teorema 2.12 (de universalitate a lui Kempe). *Orice submulțime compactă³ semialgebrică este urma unui vârf liber al unui mecanism plan.* \square

Observația 2.13. (a) Formularea de mai sus este doar un caz special al teoremei de universalitate. Pentru o versiune mai generală trimitem la lucrarea [8]. Acolo sunt descrise *toate* mulțimile semialgebrice din plan, compacte sau necompacte, care pot fi trasate cu ajutorul unui mecanism plan.

(b) Imaginile pe un ecran de calculator sunt reuniuni finite de pixeli. Un pixel este un pătrățel foarte mic pe suprafața ecranului. Orice poligon convex este mulțime semialgebrică întrucât este intersecție de semiplane. Prin urmare un pixel este o mulțime semialgebrică compactă și deci orice regiune care se poate vizualiza pe un calculator este compactă.

Pentru a înțelege formularea lui Thurston a acestei teoreme să observăm mai întâi că orice curbă compactă din plan care este reuniune finită de arcuri parametrizate de polinoame este o submulțime semialgebrică. Astfel de curbe, numite *spline* în analiza numerică, sunt folosite pentru a aproxima curbe arbitrare în plan. În particular, putem găsi aproximații spline arbitrar de precise pentru curba în plan descrisă de semnătura unei persoane. Aproximarea poate fi mai precisă decât rezoluția celui mai fin microscop. Din teorema de universalitate deducem că pentru orice curbă descrisă de semnătura unei persoane pe o foaie de hartie putem găsi un mecanism care să traseze o aproximare a ei capabilă să inducă în eroare cel mai performant microscop.

Orice curbă sau regiune plană care se poate produce cu un software de grafică este o curbă spline sau o regiune delimitată de curbe spline și în particular, este o curbă semialgebrică compactă. Măzgăleala din figura de mai jos a fost produsă cu un astfel de software (Adobe Illustrator), și prin urmare, este o submulțime semialgebrică compactă plană. Teorema de universalitate spune că există un mecanism astfel încât un vârf al său trasează imaginea din Figura 2.1.

³Pentru cititorul nefamiliar cu noțiunea de compactitate, iată-i definiția. O submulțime $S \subset \mathbb{R}^n$ se numește *compactă* dacă este *mărginită* (adică este conținută într-o bilă de rază suficient de mare) și *închisă* (dacă limita oricărui șir de puncte din S este de asemenea un punct din S).

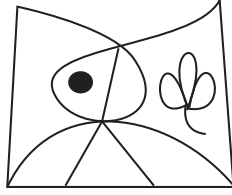


FIGURE 2.1. Mâzgâleală semialgebrică.

(c) Teorema de universalitate are o istorie interesantă. A fost formulată și demonstrată pentru prima dată de A. Kempe⁴ în 1876, [6].

Deși principiul foarte ingenios de demonstrație și ideile de bază erau corecte, demonstrația avea o eroare. În termeni abstracti, el a neglijat să considere rolul singularităților în spațiul de configurații al unui mecanism. În termeni concreți, el a neglijat să considere rolul unor configurații de genul contraparalelogramului descris în Exemplul 1.2.

Demonstrația a fost reparată mai bine de un secol mai târziu de matematicienii M. Kapovich și J. Millson în lucrarea [5]. Demonstrația lor se bazează pe același principiu ca și Kempe, dar pașii intermediari au fost modificați substanțial folosind puncte de vedere și rezultate moderne de geometrie. În această lucrare ei demonstrează rezultate mult mai generale, dar enunțurile lor sunt mult prea sofisticate pentru a le include aici.

În 2005, doi tineri studenți americani T. Abbot și R. Barton, au reabilitat demonstrația lui Kempe în teza lor de Master de la Massachusetts Institute of Technology, [1].

(d) Probabil că cititorul este curios să afle cât de complicat este de construit concret un mecanism care să traseze o curbă plana data. Metoda de demonstrație este constructivă, dar conduce la mecanisme extrem de complexe. T. Abbot și R. Barton (care sunt informaticieni) au estimat în [1] această complexitate. Pentru mai multe informații privind această teoremă trimitem la recenta monografie [3]. \square

În secțiunea care urmează dorim să schișăm demonstrația lui Kapovich și Millson a teoremei de universalitate.

3. REPREZENTAREA APLICAȚIILOR POLINOMIALE CU AJUTORUL MECANISMELOR

Să explicăm, în reformularea modernă lui Kapovich și Millson, tehnica de bază propusă de Kempe. Fie $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$ un mecanism plan abstract. Ca de obicei, notăm cu V mulțimea de vârfuri. Să presupunem că \mathbb{I}, \mathbb{O} sunt submulțimi ale lui V . Mulțimea \mathbb{I} este mulțimea de *inputuri*, iar \mathbb{O} este mulțimea de *outputuri*. Mulțimile \mathbb{I} și \mathbb{O} pot avea vârfuri în comun. Să observăm că avem niște proiecții canonice

$$\pi_{\mathbb{I}} : \mathbb{C}^V \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{I}}, \quad \mathbb{C}^V \ni \zeta \mapsto \zeta|_{\mathbb{I}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{I}}.$$

Reamintim că în egalitatea de mai sus privim ζ ca o funcție $\zeta : V \rightarrow \mathbb{C}$. Atunci $\zeta|_{\mathbb{I}}$ este restricția ei la submulțimea \mathbb{I} . În mod similar definim o proiecție canonică $\pi_{\mathbb{O}} : \mathbb{C}^V \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$. Spațiul de configurații $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ este, după cum știm, o submulțime algebrică reală a lui \mathbb{C}^V . Definim

$$D(\mathcal{M}, \mathbb{I}) := \pi_{\mathbb{I}}(\mathcal{C}(\mathcal{M})) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{I}}.$$

Numim această mulțime *domeniul* tripletului $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$. Din teorema Tarski-Seidenberg deducem că domeniul este o mulțime semialgebrică.

⁴El a fost avocat de profesie, dar mare amator de matematică. Printre altele, a dat și o demonstrație (incompletă) a problemei celor patru culori. În pofida erorii, ideile lui s-au dovedit a fi fundamentale. Demonstrația din 1976 a acestei teoreme cu ajutorul calculatorului se bazează pe ideile propuse de Kempe.

Fie $F : D(F) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$ o aplicație definită pe o submulțime $D(F)$ a lui $\mathbb{C}^{\mathbb{I}}$. Spunem că tripletul $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă aplicația F dacă domeniul $D(\mathcal{M}, \mathbb{I})$ este conținut în domeniul $D(F)$ al aplicației F și în plus

$$\pi_{\mathbb{O}} = F(\pi_{\mathbb{I}}(\zeta)), \quad \forall \zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M}),$$

În limbaj modern, egalitatea de mai sus spune ca diagrama de mai jos este comutativă.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}(\mathcal{M}) & \\ \pi_{\mathbb{I}} \swarrow & & \searrow \pi_{\mathbb{O}} \\ D(F) & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{\mathbb{O}} \end{array}$$

Să observăm că dacă $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă F , atunci pentru fiecare punct $\vec{z} \in D(\mathcal{M}, \mathbb{I})$ pot exista mai multe configurații $\zeta \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ astfel încât $\zeta|_{\mathbb{I}} = \vec{z}$. Toate aceste configurații au însă proprietatea că poziția outputului $\zeta|_{\mathbb{O}}$ este unic determinată. Mai precis, dacă inputul $\zeta|_{\mathbb{I}}$ este punctul $\vec{z} \in \mathbb{C}^{\mathbb{I}}$, atunci output-ul $\zeta|_{\mathbb{O}}$ este punctul $F(\vec{z}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$. Cu alte cuvinte, poziția vârfurilor input determina unic poziția vârfurilor output, desi poate exista o multitudine de configurații pentru cu aceleași vârfuri input și output.

Exemplul 3.1. (a) Să considerăm mecanismul canonic \mathcal{M}_{can} definit în Exemplul 1.4. Definim $\mathbb{I} = \{D\}$ și $\mathbb{O} = \{E\}$. Este clar că $(\mathcal{M}_{\text{can}}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă aplicația identitate $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

(b) Să notăm cu \mathcal{M} inversorul lui Peaucellier rigidizat⁵ în care vârful S este liber; vezi Figura 3.1. Am introdus vârful F pentru a elimina unele degenerări. În Figura 3.1 avem $c < b < a$

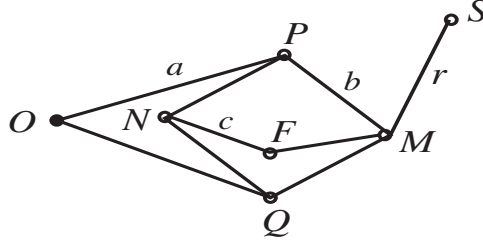


FIGURE 3.1. Inversorul lui Peaucellier cu vârful S liber.

Dacă definim $\mathbb{I} = \{M\}$ și $\mathbb{O} = \{N\}$, atunci tripletul $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă restricția la coroana circulară $\{a\}$

$$\sqrt{a^2 - b^2 + c^2} - c \leq |z - O| \leq \sqrt{a^2 - b^2 + c^2} + c$$

a transformării prin inversiune de centru O și de putere $a^2 - b^2$; vezi [4, Teorema 241]

(c) Să considerăm din nou brațul de robot din Exemplul 1.1, Figura 1.1. Notăm cu \mathcal{B} acest mecanism plan și definim $\mathbb{I} = \{c\}$, $\mathbb{O} = \{a\}$. Domeniul tripletului $(\mathcal{B}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ este discul $D(a, 2r)$ de rază $2r$ centrat în punctul a . Acest triplet reprezintă funcția constantă $F : D(a, 2r) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto a$. \square

Înainte de a introduce următorul concept cheie datorat lui Kapovich și Millson trebuie să mai facem câteva observații elementare. Să observăm că orice bijecție $\alpha : A \rightarrow B$ induce un izomorfism liniar

$$\alpha^* : \mathbb{C}^B \rightarrow \mathbb{C}^A$$

care asociază funcției $\zeta : B \rightarrow \mathbb{C}$ funcția $\alpha^*(\zeta) = \zeta \circ \alpha : A \rightarrow \mathbb{C}$. Astfel, dacă notăm cu $\llbracket n \rrbracket$ mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$, atunci spațiul $\mathbb{C}^{\llbracket n \rrbracket}$ se identifică natural cu spațiul \mathbb{C}^n , iar orice bijecție $\alpha : \llbracket n \rrbracket \rightarrow I$ induce un izomorfism $\alpha^* : \mathbb{C}^I \rightarrow \mathbb{C}^n$.

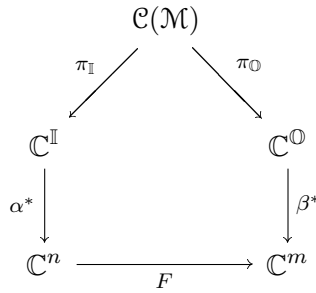
⁵Reamintim că rigidizarea revine la adăugarea unei proteze rombului $MPNQ$. Pentru simplitate, nu am mai inclus proteza în Figura 3.1.

Definiția 3.2. Fie $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ o funcție polinomială reală. Spunem că F este *reprezentabilă prin mecanisme plane* dacă pentru orice rază $R > 0$, oricât de mare, există un mecanism

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_R = (G, \ell, V_f, \phi)$$

cu mulțimea de vârfuri $V = V_R$, submulțimi $\mathbb{I}, \mathbb{O} \subset V$, și bijecții $\alpha : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \mathbb{I}, \beta : \llbracket m \rrbracket \rightarrow \mathbb{O}$ astfel încât au loc următoarele condiții.

- (a) $\mathbb{I} \cap \mathbb{O} = \emptyset$.
- (b) Domeniul $D(\mathcal{M}, \mathbb{I})$ conține bila de rază R în $\mathbb{C}^{\mathbb{I}}$ cu centrul în origine.
- (c) Triplețul $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcția polinomială $(\beta^*)^{-1} \circ F \circ \alpha^* : \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$, adică diagrama de mai jos este comutativă.



Exemplul 3.3. Să considerăm aplicația polinomială $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, F(z, w) = \frac{1}{2}(z, w)$. Aceasta se poate reprezenta cu ajutorul unor mecanisme numite *pantografe*; vezi Figura 3.2.

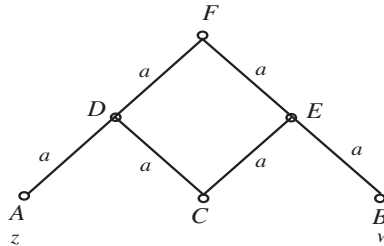


FIGURE 3.2. *Pantograf.*

Să notăm cu \mathcal{P} acest mecanism. Rombul $CDFE$ este rigidizat, dar pentru simplitate nu am inclus proteza. În Figura 3.2 am notat cu $z \in \mathbb{C}$ coordonata complexă a lui A , și cu $w \in \mathbb{C}$ coordonata complexă a lui B . Atunci coordonata complexă a lui C este $\frac{1}{2}(z + w)$ deoarece punctul C este mijlocul segmentului $[AB]$. Observăm că $|z - w| \leq 4a$. Definim $\mathbb{I} = \{A, B\}$ și $\mathbb{O} = \{C\}$. Atunci triplețul $(\mathcal{P}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ are domeniul

$$D(\mathcal{P}, \mathbb{I}) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z - w| \leq 4a\}.$$

Acest domeniu conține bila din \mathbb{C}^2 cu centrul în origine și de diametru $4a$,

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 \leq 4a^2\}.$$

Variind lungimea a deducem că această familie de pantografe reprezintă funcția F . □

Are loc următorul rezultat fundamental care generalizează Exemplul 3.3.

Teorema 3.4 (de reprezentabilitate a lui Kapovich-Millson). *Orice aplicație polinomială reală $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ este reprezentabilă prin mecanisme plane.* □

Înainte de a schița demonstrația acestei teoreme dorim să arătăm cum putem deduce din ea teorema de universalitate.

Demonstrația teoremei de universalitate. Urmăm strategia din [8]. În demonstrație avem nevoie de următorul rezultat de geometrie semialgebrică.

Lema 3.5. *Fie $S \subset \mathbb{R}^m$ o mulțime semialgebrică compactă. Atunci există o mulțime algebrică compactă $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ astfel încât $S = \pi(A)$, unde $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ este proiecția canonică.* \square

Demonstrația nu este lungă, dar folosește rezultate delicate de geometrie algebrică reală și de aceea nu o includem. Dificultatea constă în a găsi o mulțime algebrică compactă A astfel încât $\pi(A) = S$. Se pot găsi foarte ușor mulțimi algebrice necompacte A astfel încât $\pi(A) = S$. Cititorul interesat poate consulta [8, Lemma 3.1].

Să considerăm o mulțime semialgebrică compactă S din planul euclidian \mathbb{C} . Folosind lema de mai sus putem găsi o submulțime algebrică reală compactă $A \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ astfel încât $S = \pi(A)$, unde $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ este proiecția canonică,

$$(z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto z_{n+1}. \quad (3.1)$$

Folosind Propoziția 2.4 deducem că există o aplicație polinomială reală $p : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ astfel încât $A = p^{-1}(0)$. Deoarece A este compactă,⁶ este inclusă într-o bilă B_R de rază R cu centrul în $0 \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

Din teorema Kapovich-Millson deducem că aplicația p este reprezentabilă prin mecanisme. Prin urmare, putem găsi un mecanism $\mathcal{M} = (G, \ell, V_f, \phi)$, submulțimi disjuncte $\mathbb{I}, \mathbb{O} \subset V$, o bijecție $\llbracket n+1 \rrbracket \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}$ astfel încât,

- mulțimea \mathbb{O} are cardinal 1, $\mathbb{O} = \{v_0\}$,
- imaginea lui $D(\mathcal{M}, \mathbb{I})$ prin izomorfismul $\alpha^* : \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ conține mulțimea algebrică compactă A , $\alpha^*(D(\mathcal{M}, \mathbb{I})) \supset A$,
- tripletul $(\mathcal{M}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă aplicația $\mathbb{C}^{\mathbb{I}} \xrightarrow{\alpha^*} \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{p} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$.

Definim acum un nou mecanism \mathcal{M}' fixând vârful v_0 din \mathbb{O} în originea planului complex. Mai precis

$$\mathcal{M}' = (G, \ell, V'_f, \phi'), \quad V'_f = V_f \cup \{v_0\}, \quad \phi'(v) = \begin{cases} \phi(v), & v \in V_f \\ 0, & v = v_0. \end{cases}$$

Atunci $\alpha^*(\mathcal{C}(\mathcal{M}')) = A$. Să notăm cu v vârful $\alpha(n+1)$. Atunci urma $\mathcal{C}(\mathcal{M}', v)$ a vârfului v al mecanismului \mathcal{M}' coincide cu imaginea lui A prin proiecția π descrisă de (3.1). Această imagine este, prin construcție, mulțimea semialgebrică compactă $S \subset \mathbb{C}$. \square

4. DEMONSTRAȚIA TEOREMEI DE REPREZENTABILITATE

Principiul de demonstrație datorat lui Kempe este simplu: reducem problema reprezentabilității la o clasă de aplicații polinomiale mai simple care generează prin operații elementare (adunare, înmulțire, compunere etc.) întreaga familie de aplicații polinomiale.

Să considerăm două aplicații polinomiale $F_0 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{m_0}$ și $F_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{m_1}$. Atunci avem o nouă aplicație polinomială $F_0 \times F_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{m_0} \times \mathbb{C}^{m_1}$. Dacă restricția lui F_j , $j = 0, 1$, la o bilă B a spațiului \mathbb{C}^n este reprezentabilă printr-un triplet $(\mathcal{M}_j, \mathbb{I}_j, \mathbb{O}_j)$ și bijecții

$$\alpha_j : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \mathbb{I}_j, \quad \beta_j : \llbracket m_j \rrbracket \rightarrow \mathbb{O}_j,$$

atunci putem forma un nou mecanism $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1$ obținut identificând vârfulurile din \mathbb{I}_0 cu vârfulurile din \mathbb{I}_1 cu ajutorul bijecției

$$\mathbb{I}_0 \xrightarrow{\alpha_0^{-1}} \llbracket n \rrbracket \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{I}_1.$$

⁶Aici avem nevoie de compactitatea lui S . Dacă S nu e compactă atunci A nu poate fi compactă.

Mulțimile \mathbb{I}_0 și \mathbb{I}_1 se identifică natural cu o submulțime de vârfuri a lui $\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1$. Definim $\mathbb{O} = \mathbb{O}_0 \cup \mathbb{O}_1$. Atunci tripletul $(\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_1, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă restricția lui $F_0 \times F_1$ la bila B a spațiului \mathbb{C}^n . Am arătat astfel că dacă două aplicații polinomiale $F_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{m_j}$ sunt reprezentabile, atunci și produsul lor cartezian $F_0 \times F_1$ este reprezentabil. Am redus astfel problema reprezentabilității la cazul special al aplicațiilor polinomiale reale $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

În Exemplul 3.1(a) am arătat că aplicația identică $\mathbb{1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Prin urmare, și produsul cartezian

$$\Delta_n = \underbrace{\mathbb{1} \times \cdots \times \mathbb{1}}_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad z \mapsto \underbrace{(z, \dots, z)}_n$$

este reprezentabilă.

Lema 4.1. (a) *Compunerea a două aplicații polinomiale reprezentabile este o aplicație polinomială reprezentabilă.*

(b) *Dacă $F_j : \mathbb{C}^{n_j} \rightarrow \mathbb{C}^{m_j}$, $j = 0, 1$ sunt două aplicații reprezentabile, atunci funcția*

$$(F_0, F_1) : \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \rightarrow \mathbb{C}^{m_0} \times \mathbb{C}^{m_1}, \quad \mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1} \ni (\vec{z}_0, \vec{z}_1) \mapsto (F_0(\vec{z}_0), F_1(\vec{z}_1)),$$

este reprezentabilă. În particular, aplicația identică $\mathbb{1}_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ este reprezentabilă.

(c) *Funcțiile*

$$z \xrightarrow{M_c} cz, \quad c \in \mathbb{R}^*, \quad z \xrightarrow{S} z^2, \quad z \xrightarrow{C} \bar{z}$$

sunt reprezentabile. Mai general, operația de reflexie într-o dreaptă în plan este reprezentabilă.

(d) *Aplicația de adunare $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\ni (z, w) \mapsto z + w \in \mathbb{C}$ este reprezentabilă.* □

Pentru a nu întrerupe firul logic al expunerii vom prezenta demonstrația acestei leme ceva mai târziu.

Să presupunem că $F, G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sunt două aplicații reprezentabile. Atunci suma lor $F + G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se poate scrie ca o compunere

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\mathbb{1}_n \times \mathbb{1}_n} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{(F, G)} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{C}.$$

Prin urmare, suma lor este de asemenea reprezentabilă. Rezultă că pentru a arăta reprezentabilitatea aplicațiilor polinomiale este suficient să arătăm că aplicațiile monomiale

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}(z_1, \dots, z_n) \mapsto \mu z_1^{a_1} \bar{z}_1^{b_1} \cdots z_n^{a_n} \bar{z}_n^{b_n}, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad a_i, b_j \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

sunt reprezentabile. Identitatea

$$zw = \frac{1}{4} \left((z+w)^2 - (z-w)^2 \right)$$

împreună cu Lemma 4.1 ne arată că funcția produs $(z, w) \xrightarrow{P} zw$ este reprezentabilă. Deducem în acest fel că produsul a două funcții reprezentabile este o funcție reprezentabilă.

Deoarece orice rotație a planului în jurul originii se poate descrie ca și compunerea a două reflexii⁷ deducem că orice rotație a planului este reprezentabilă. O rotație este echivalentă cu înmulțirea cu un număr complex de lungime 1. Deoarece înmulțirea cu orice scalar real este reprezentabilă, deducem că și înmulțirea cu orice scalar complex este reprezentabilă.

Exemplul 3.1(c) arată că monomul constant, 1, de grad zero, este reprezentabil pentru că e descris de funcția constantă.

Pentru a arăta că funcția $(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_k$ este reprezentabilă considerăm mecanismul \mathcal{D}_n care constă din n vârfurile $V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ și nici o muchie. Dacă notăm $\mathbb{I} = V_n$, $\mathbb{O} = \{v_k\}$ atunci deducem că tripletul $(\mathcal{D}_n, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcția de mai sus. Avem însă o problemă: condiția (a) din Definiția 3.2 este violată deoarece mulțimile \mathbb{I} și \mathbb{O} nu sunt disjuncte. Pentru a repara această problemă ne folosim de următorul truc.

⁷Știți să arătați acest lucru?

Înlocuim vârful v_k cu mecanismul canonic descris în Exemplul 1.4. Obținem un nou mecanism $\mathcal{D}_{n,k}$ a cărui mulțime de vârfuri este

$$V_{n,k} = (V_n \setminus \{v_k\}) \cup \{A, B, C, D, E\},$$

unde reamintim (vezi Figura 1.5) că A, B, C, D, E sunt vârfurile mecanismului canonic. Singurile muchii ale noului mecanism sunt doar muchiile care apar în mecanismul canonic. Definim

$$\mathbb{I}_{n,k} := (V_n \setminus \{v_k\}) \cup \{D\}, \quad \mathbb{O}_{n,k} := \{E\}.$$

Atunci tripletul $(\mathcal{D}_{n,k}, \mathbb{I}_{n,k}, \mathbb{O}_{n,k})$ reprezintă funcția monomială $(z_1, \dots, z_k) \mapsto z_k$.

Deducem astfel că orice aplicație monomială de forma (4.1) este reprezentabilă. Demonstrația teoremei de reprezentabilitate este încheiată dacă demonstrăm Lemma 4.1.

Demonstrația Lemei 4.1. (a) Să presupunem că avem două aplicații polinomiale reprezentabile

$$\mathbb{C}^{n_0} \xrightarrow{F_0} \mathbb{C}^{n_1} \xrightarrow{F_1} \mathbb{C}^{n_2}$$

Fixăm o bilă B_0 de rază R_0 cu centrul în originea lui \mathbb{C}^{n_0} . Întrucât F_0 este continuă există o bilă B_1 de rază R_1 cu centrul în originea lui \mathbb{C}^{n_1} astfel încât

$$F_0(B(0, R_0)) \subset B(0, R_1).$$

Întrucât aplicațiile F_0 și F_1 sunt reprezentabile, există mecanisme $\mathcal{M}_j = (G_j, \ell_j, V_f^j, \phi_j)$, $j = 0, 1$, cu mulțimile de vârfuri V_j , submulțimi disjuncte $\mathbb{I}_j, \mathbb{O}_j \subset V_j$ și bijecții

$$\alpha_j : \llbracket n_j \rrbracket \rightarrow \mathbb{I}_j, \quad \beta_j : \llbracket n_{j+1} \rrbracket \rightarrow \mathbb{O}_j, \quad j = 0, 1,$$

astfel încât tripletul $(\mathcal{M}_j, \mathbb{I}_j, \mathbb{O}_j)$ reprezintă funcția

$$\Phi_j = (\beta_{j+1}^*)^{-1} \circ F_j \circ \alpha_j^* : B_j \rightarrow \mathbb{C}^{n_{j+1}},$$

$$\begin{array}{ccc} B_j & \xrightarrow{\Phi_j} & \mathbb{C}^{n_{j+1}} \\ \downarrow \alpha_j^* & & \downarrow \beta_{j+1}^* \\ \mathbb{C}^{n_j} & \xrightarrow{F_j} & \mathbb{C}^{n_{j+1}} \end{array}$$

Formăm acum mecanismul $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \#_{\mathbb{O}_0, \mathbb{I}_1} \mathcal{M}_1$ obținut identificând vârfurile din \mathbb{O}_0 cu vârfurile din \mathbb{I}_1 cu ajutorul bijecției

$$\mathbb{O}_0 \xrightarrow{\beta_0^{-1}} \llbracket n_1 \rrbracket \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{I}_1.$$

Notăm cu V mulțimea de vârfuri a noului mecanism. Atunci \mathbb{I}_0 și \mathbb{O}_1 se identifică cu submulțimi disjuncte $\mathbb{I}, \mathbb{O} \subset V$, iar tripletul $(\mathcal{M}_0 \#_{\mathbb{O}_0, \mathbb{I}_1} \mathcal{M}_1, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcția polinomială $F_1 \circ F_0$ restricționată la bila B_0 .

(b) Demonstrația acestei afirmații o lăsam ca un exercițiu cititorului.

(c) Pentru a demonstra că \mathcal{M}_c este reprezentabilă folosim pantograful rigidizat cu un punct fix; Figura 4.1.

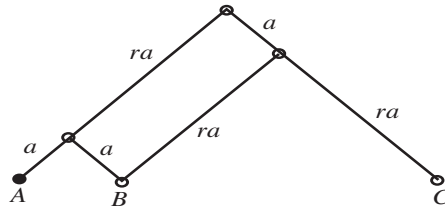


FIGURE 4.1. Pantograful cu un punct fix.

Notăm cu \mathcal{P} acest mecanism, în care vârful A este fixat în originea planului. Definim $\mathbb{I} = \{B\}$, $\mathbb{O} = \{C\}$ și notăm cu z coordonate lui B . Din teorema lui Thales deducem că tripletul $(\mathcal{P}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcția M_c , $c = (1+r)z$, pe domeniul $\{|z| \leq 2a\}$. Dacă alegem a și r arbitrar deducem că toate funcțiile M_c , $c > 1$, sunt reprezentabile. Dacă schimbăm rolurile lui B și C , adică definim $\mathbb{I} = \{C\}$ și $\mathbb{O} = \{B\}$, deducem că și funcțiile M_c , $c \in (0, 1)$, sunt reprezentabile.

Dacă în pantograful din Figure 4.1 fixăm vârful B în origine, și alegem $r = 1$, obținem un mecanism pe care-l notăm cu \mathcal{P}_B . Definim $\mathbb{I} = \{A\}$ și $\mathbb{O} = \{C\}$. Atunci tripletul $(\mathcal{P}_B, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă funcția M_{-1} pe domeniul $\{|z| < 2a\}$. Rezultă că înmulțirea cu orice scalar real $c \neq 0$ este reprezentabilă.

Deoarece funcția $(z, w) \mapsto \frac{1}{2}(z + w)$ este reprezentabilă (Exemplul 3.3) deducem că și compunerea

$$(z, w) \mapsto \frac{1}{2}(z + w) \xrightarrow{M_2} z + w$$

este reprezentabilă. Asta ne arată că funcția adunare este reprezentabilă și deci partea (d) a lemei este demonstrată.

Notăm cu h inversiunea de centru originea, și putere t^2 , $t > 0$. În coordonate complexe putem scrie

$$h(z) = \frac{t^2}{|z|^2}z. \quad (4.2)$$

Dupa cum am văzut în Exemplul 3.1(b), Figura 3.1, putem folosi inversorul lui Peaucellier pentru a reprezenta această inversiune pe coroane circulare. Dacă în Figura 3.1 alegem $t = \sqrt{a^2 - b^2} = 4r$ și $c = 3r$ acest mecanism reprezintă inversiunea h pe coroana circulară $\{2r \leq |z| \leq 8r\}$.

Folosind (4.2) deducem imediat egalitatea

$$z^2 = t^2 - th \left(\frac{1}{2} (h(t+z) + h(t-z)) \right)$$

Dacă alegem $|z| \leq r$, atunci $z + t$ și $z - t$ se află în coroana circulară $\{2r \leq |z| \leq 8r\}$ și deci $h(z + t)$ și $h(z - t)$ se pot reprezenta prin mecanisme pe discul $\{|z| \leq t\}$. Cu alte cuvinte, funcția z^2 se obține prin adunare, compunere și înmulțire cu scalari din funcții reprezentabile și prin urmare este reprezentabilă.

Ca să reprezentăm funcția conjugare $z \mapsto \bar{z}$ folosim un mecanism descris în Figura 4.2.

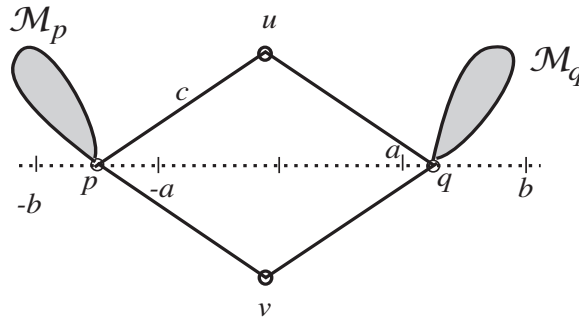


FIGURE 4.2. Simulând conjugarea.

Să explicăm puțin această figură. Dreapta punctată este axa reală. \mathcal{M}_p și \mathcal{M}_q sunt mecanisme independente conținând vârfurile p și respectiv q astfel încât urma lui p este intervalul $[-b, -a]$, iar urma lui q este intervalul $[a, b]$. (De exemplu, \mathcal{M}_p și \mathcal{M}_q sunt inversoare Peaucellier rigidizate ca în Exemplul 1.3.) În mijlocul figurii avem un romb rigidizat $puqv$ ale cărui laturi au lungimea c . Notăm cu \mathcal{C} acest mecanism și definim $\mathbb{I} = \{u\}$, $\mathbb{O} = \{v\}$. Observăm că tripletul $(\mathcal{C}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$ reprezintă aplicația de conjugare întrucât v este reflexia lui u în axa reală. Dacă alegem a, b, c astfel încât

$$\min(b - c, c - a) > R > 0$$

atunci domeniul acestui triplet conține discul $\{|z| \leq R\}$. Aceasta arată că aplicația de conjugare este reprezentabilă. \square

REFERENCES

- [1] T.G. Abbot, R.W. Barton: *Generalizations of Kempe's Universality Theorem*, Teză de Master, Massachusetts Institute of Technology, 2005. Se poate găsi pe Internet
<http://web.mit.edu/tabbott/www/papers/mthesis.pdf>
- [2] M. Coste: *An introduction to semi-algebraic geometry*, Real Algebraic and Analytic Geometry Network. Se poate găsi pe Internet
<http://www.ihp-raag.org/publications.php>
- [3] E.D. Demaine, J. O'Rourke: *Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra*, Cambridge University Press, 2007.
- [4] J. Hadamard: *Lecții de Geometrie Elementară. Geometrie Plană*, Editura Tehnică, București, 1962.
- [5] M. Kapovich, J.J. Millson: *Universality theorems for configuration spaces of plan linkages*, *Topology*, **41**(2002), 1051-1107, sau pe Internet,
<http://front.math.ucdavis.edu/9803.5150>
- [6] A. B. Kempe: *On a general method of describing plane curves of the n th degree by linkwork*, *Proc. London Math. Soc.*, **7**(1876), 213-216.
- [7] H.C. King: *Planar linkages and algebraic sets*, *Turkish J. Math.*, **23**(1999), 33-56. Se poate găsi pe Internet
<http://front.math.ucdavis.edu/9807.5023>
- [8] ———: *Semiconfiguration spaces of plan linkages*, preprint. Se poate găsi pe Internet
<http://front.math.ucdavis.edu/9810.5130>

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF NOTRE DAME, NOTRE DAME, IN 46556-4618.

E-mail address: nicolaescu.1@nd.edu

URL: <http://www.nd.edu/~lnicolae/>