METODA FUNCTIILOR GENERATOARE

LIVIU I. NICOLAESCU

ABSTRACT. In aceasta nota vom descriem o tehnica deosebit de flexibila de abordare a multor probleme de combinatorica enumerativa.

CONTENTS

INTRODUCERE

In randurile care urmeaza dorim sa prezentam cititorului o tehnica remarcabil de eficace in abordare a multor probleme din combinatorica. Metoda este veche de cateva sute de ani si a fost folosita de clasici ai matematicii ca Newton, Bernoulli, Euler, Gauss, Riemann pentru a demonstra rezultate surprinzatoare.

Probabil ca prima manifestare a acestei metode este formula binomului lui Newton care spune ca numarul

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

este coeficientul lui t^k in polinomul $(1+t)^n$, adica

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k.$$

In limbaj modern, putem spune ca functia $(1+t)^n$ este functia generatoare a numerelor

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}.$$

Din acest motiv, aceste numere se mai numesc si *coeficienti binomiali*. Faptul ca functia generatoare $(1+t)^n$ are o forma asa de simpla conduce la o multitudine de consecinte pentru coeficientii binomiali.

Date: March 2007.

Metoda functiilor generatoare are la baza o idee foarte simpla. Unui sir de numere reale $a_0, a_1, \ldots,$ ii asociem o expresie de forma

$$\underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots ,$$

pe care o numim functia sau seria generatoare a acestui sir. Putem gândi o astfel de serie ca un polinom de grad infinit. O astfel de expresie se numeste serie *formala* de puteri pentru ca nu ne intereseaza convergenta ei.

De foarte multe ori aceste serii au forme foarte simple care ne permit sa tragem concluzii despre sirul original $\{a_n\}_{n\geq 0}$ mai greu de obtinut pe alte cai.

In prima parte a lucrarii discutam seriile formale si operatiile pe care le putem efectua cu ele. Ilustram aceste idei pe multe situatii concrete care apar in probleme de combinatorica si algebra.

In cea de a doua parte a lucrarii discutam siruri de polinoame de o singura variabila. Aceasta parte a lucrarii este putin mai dificila. Desi rezultatele sunt vechi de cateva sute de ani, le abordam dintr-un un punct de vedere foarte modern initiat acum doua-trei decenii. Nivelul de abstractie este ceva mai ridicat, si probabil ca cititorul va trebui sa se adapteze la un mod de gandire radical diferit de cel intalnit matematica de liceu, desi nivelul de cunostiinte nu depaseste de matematica de liceu.

De aceea incurajam foarte mult cititorul sa rezolve exercitiile pe care le-am presarat de-a lungul prezentarii. Sunt probleme clasice, interesante in sine, dar care vor ajuta si la asimilarea acestui nou punct de vedere. Aceste probleme sunt comparabile ca nivel de dificultate cu probleme de olimpiada, faza nationala sau internationala.

Pentru mai multe informatii privind acest subiect recomandam [1, 2, 4, 5] care ne-au servit ca ghid in organizarea acestei lucrari.

1. Serii formale si serii convergente de puteri

Definiţia 1.1. O *serie formala de puteri* cu coeficienti reali este o expresie de forma

$$\underline{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Mai sus, t este o variabila formala. Mulţimea seriilor formale de puteri se noteaza cu $\mathbb{R}[[t]]$.

□

Sa observam ca exista niste operatii naturale pe aceasta multime. Putem aduna doua serii

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots ,$$

unde

$$c_n = a_n + b_n, \ \ \forall n \geq 0.$$

Putem de asemenea inmulti doua serii formale ca si cum am inmulti doua polinoame

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) \times (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots ,$$

unde

$$c_0 = a_0 b_0, \ \ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$

si in general

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \ \ \forall n \geq 0.$$

Aceste operatii sunt comutative, asociative distributive etc. In limbaj modern, spunem ca $\mathbb{R}[[t]]$ este un inel comutativ cu unitate.

Pentru a opera cu seriile formale de puteri este convenabil sa introducem notiunea de *jet*

Definiţia 1.2. Pentru orice intreg nenegativ k si pentru orice serie formala

$$\underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \in \mathbb{R}[[t]],$$

definim k-jetul lui $\underline{a}$ ca fiind polinomul de grad cel mult k,

$$J_k \underline{a}(t) =:= a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k. \qquad \square$$

Jeturile unei serii sunt importante datorita urmatorului fapt elementar.

Teorema 1.3 (Principiul separarii formale). *Fie $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}[[t]]$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente.*

(a)$\underline{u} = \underline{v}$.
(b) $J_k \underline{u} = J_k \underline{v}$, $\forall k \geq 0$. $\square$

Remarca 1.4. Credem ca ar trebui sa explicam cititorului motivul pentru care rezultatul de mai sus se numeste principiu al separararii. Motivul este simplu. Rezultatul de mai sus spune ca putem distinge (sau separa) doua serii $\underline{u}, \underline{v}$ uitandu-ne la jeturile lor. Mai precis, putem decide daca $\underline{u} \neq \underline{v}$ *intr-un numar finit de pasi,* in sensul ca trebuie sa existe un intreg pozitiv astfel incat $J_k \underline{u} \neq J_k \underline{v}$.

Teorema de mai sus este un caz foarte special al unui rezultat fundametal in algebra numit teorema de intersectie a lui Krull. $\square$

Propoziţia 1.5. *Sa presupunem ca $\underline{u}(t) = u_0 + u_1 t + \cdots \in \mathbb{R}[[t]]$ este o serie formala de puteri cu proprietatea ca $u_0 \neq 0$, adica $J_0(\underline{u}(t)) \neq 0$. Atunci exista o unica serie formal $\underline{v}(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ cu proprietatea ca*

$$\underline{u}(t)\underline{v}(t) = 1. \tag{1.1}$$

Vom nota $\underline{v}(t) := \frac{1}{\underline{u}(t)}$ si vom spune ca $\underline{v}$ este inversa multiplicativa *a seriei $\underline{u}(t)$.*

Demonstraţie. O serie $\underline{v}(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots$ satisface (1.1) daca si numai daca satisface urmatorul sir de egalitati

$$u_0 v_0 = 1, \;\; u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = 0, \;\; \forall n \geq 1.$$

Prin urmare, coeficientii v_n satisfac relatia de recurenta

$$v_0 = \frac{1}{u_0}, \;\; v_n = -\frac{1}{u_0}\big(u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 \big). \tag{1.2}$$

Prin urmare seria $\underline{v}(t)$ ai carei coeficienti sunt definiti unic de (1.2) satisface ecuatia (1.1). $\square$

Remarca 1.6. Rezultatul de mai sus se poate reformula in limbaj modern spunand ca elementele $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ cu proprietatea ca $J_0(\underline{u}(t)) \neq 0$ sunt elemente inversabile ale inelului $\mathbb{R}[[t]]$. Este usor de vazut ca acestea sunt *toate* elementele inversabile ale acestui inel. $\square$

Definiţia 1.7. O serie de puteri

$$\underline{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$$

se numeste *convergenta* daca exista un numar real pozitiv r astfel incat, pentru orice numar $t \in (-r, r)$, sirul de numere reale

$$\sigma_n \underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

este convergent. Vom nota cu $\sigma_\infty \underline{a}(t)$ limita acestui sirului $\sigma_n \underline{a}(t)$, si o vom numi *suma seriei*. De asemenea, vom nota cu $\mathbb{R}\{t\}$ submultimea lui $\mathbb{R}[[t]]$ constand din serii convergente. $\square$

Exemplul 1.8. (a) Seria geometrica

$$\underline{g}(t) := 1 + t + t^2 + \cdots$$

este convergenta pentru orice $|t| < 1$ iar suma ei este $\frac{1}{1-t}$.
(b) Seria

$$\underline{e}(t) := 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots$$

este convergenta pentru orice numar real t, iar suma ei este e^t. □

Are loc urmatorul rezultat a carui demonstratie o lasam cititorului ca un exercitiu.

Teorema 1.9. *(a) Suma si produsul a doua serii convergente este o serie convergenta.*
(b) O serie de puteri

$$\underline{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$$

este convergenta daca si numai daca exista un numar real pozitiv c astfel incat

$$|a_{n+1}| \leq c|a_n|, \quad \forall n \geq 0.$$

(c) Daca seria $\underline{a}(t)$ este convergenta pentru $t \in (-r, r)$, atunci suma ei este o functie infinit differentiabila $f(t) : (-r, r) \to \mathbb{R}$, iar coeficientii a_n sunt descrisi de formula MacLaurin

$$a_n := \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n}\Big|_{t=0} f(t). \qquad \square$$

Partea (a) a teoremei de mai sus se poate reformula spunand ca submultimea $\mathbb{R}\{t\}$ este un subinel al lui $\mathbb{R}[[t]]$. De multe ori, cand avem de a face cu o serie convergenta $\underline{a}(t)$ a carei suma este o functie $f(t)$, in loc sa folosim notatia mai precisa

$$\sigma_\infty \underline{a}(t) = f(t)$$

vom folosi notatia mai simpla

$$\underline{a}(t) = f(t).$$

Astfel, in loc sa scriem

$$\sigma_\infty(1 + t + t^2 + \cdots) = \frac{1}{1-t}$$

vom scrie

$$1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t}.$$

Exercițiul 1.10. Fie α un numar real. Folosind Teorema 1.9 aratati ca seriile

$$p_\alpha(t) = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots$$

$$L(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$$

sunt convergente, iar sumele lor sunt

$$p_\alpha = (1+t)^\alpha, \quad L(t) = \log(1+t),$$

unde $\log$ este logaritmul natural. □

Pe multimea $\mathbb{R}[[t]]$ putem defini operatia de derivare formala

$$D:\mathbb{R}[[t]]\to\mathbb{R}[[t]],\ \ D(a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots)=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots.$$

Propoziţia 1.11. *Operatia de derivare formala este liniara, adica*

$$D(\lambda\underline{a}+\mu\underline{b})=\lambda D\underline{a}+\mu D\underline{b},\ \ \forall\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}[[t]],\ \ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

si satisface regula lui Leibniz

$$D(\underline{a}\cdot\underline{b})=(D\underline{a})\underline{b}+\underline{a}(D\underline{b}),\ \ \forall\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}[[t]].$$ □

Exerciţiul 1.12. Demonstrati propozitia de mai sus folosind principiul separararii formale. □

Are loc urmatorul rezultat.

Teorema 1.13. *Daca seria formala $\underline{a}(t)\in\mathbb{R}[[t]]$ este convergenta si are suma $s(t)$ atunci si seria formala $D\underline{a}(t)$ este convergenta, iar suma ei este $\frac{ds}{dt}$.* □

Demonstratia necesita unele notiuni mai avansate de analiza si de aceea nu o prezentam. Cititorul curios poate consulta orice tratat de analiza reala, ca de exemplu [3, Chap. XII]

Exemplul 1.14. Seria $\underline{a}(t)=1+t+t^2+\cdots$ converge la $\frac{1}{1-t}$. Prin urmare derivata formala

$$D\underline{a}(t)=1+2t+3t^2+\cdots$$

este convergenta iar suma ei este

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t}=\frac{1}{(1-t)^2}$$

Mai general, seria formala $D^k\underline{a}(t)$ este convergenta, iar suma ei este $\frac{k!}{(1-t)^{k+1}}$. Aceasta ultima egalitate se poate rescrie sub forma

$$k!t^0+2\cdot3\cdots kt+\cdots+(n+1)\cdots(n+k-1)t^n+\cdots=\frac{k!}{(1-t)^{k+1}}.$$

Impartind prin $k!$ deducem

$$\frac{1}{(1-t)^{k+1}}=1+\binom{k+1}{k}t+\cdots+\binom{n+k}{k}t^n+\cdots. \tag{1.3}$$

Formula de mai sus se poate obtine si din Exercitiul 1.10 alegand $\alpha=-(k+1)$. Sa observam acum ca

$$\frac{1}{(1-t)^{k+1}}=\Big(\sum_{m\geq0}t^m\Big)^{k+1}=\prod_{j=0}^{k}\Big(\sum_{m_j\geq0}t^{m_j}\Big).$$

Coeficientul lui t^n din produsul de mai sus este egal cu coeficientul lui t^n al seriei din partea stanga a egalitatii (1.3). Acest coeficient este $\binom{n+k}{k}$.

Pe de alta parte, coeficientul t^n din produsul de mai sus are o interpretare combinatorica. El este egal cu numarul de monoame de forma

$$t^{m_0}\cdot t^{m_1}\cdots t^{m_k}$$

cu proprietatea ca $m_0+\cdots+m_k=n$. Putem reformula acest lucru mult mai intuitiv.

Avem $(k+1)$ cutii etichetate cu numerele $0,1,\dots,k$. Dorim sa aflam in cate moduri putem distribui n bile *identice* in aceste $(k+1)$ cutii *distincte*. O distributie este data de colectia ordonata de numere $(m_0,m_1,\dots,m_k)$, unde m_j este numarul de bile din cutia j. Ajungem astfel la un rezultat combinatoric binecunoscut: numarul de distributii de n bile *identice* in $(k+1)$ cutii *diferite* este egal cu $\binom{n+k}{k}$. □

2. Funcţii generatoare

Putem in fine introduce personajul principal al acestei lucrari.

Definiţia 2.1. *Functia generatoare* a unui sir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ este seria formala

$$\mathbf{Fg}(a_n;t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Functia generatoare de tip exponential a unui sir $\{a_n\}_{n\geq 0}$, este functia generatoare a sirului $\{\frac{a_n}{n!}\}_{n\geq 0}$. Vom nota functia generatoare de tip exponential prin $\mathbf{Fg}_{\exp}$, astfel ca

$$\mathbf{Fg}_{\exp}(a_n;t) = \mathbf{Fg}(\frac{a_n}{n!};t).$$ □

Exemplul 2.2. (a) Daca $a_n = 1$, $\forall n \geq 0$ atunci

$$\mathbf{Fg}(a_n;t) = 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t},\ \ \mathbf{Fg}_{\exp}(a_n;t) = e^t.$$

Mai general, pentru orice numar real r avem egalitatile

$$\mathbf{Fg}(r^n;t) = 1 + rt + r^2t^2 + \cdots = \frac{1}{1-rt},\ \ \mathbf{Fg}_{\exp}(r^n;t) = e^{rt}.$$

(b) Pentru orice siruri (a_n), (b_n), si pentru rice numar real c au loc egalitatile

$$\mathbf{Fg}(a_n + b_n;t) = \mathbf{Fg}(a_n : t) + FG(b_n;t),\ \ \mathbf{Fg}(ca_n;t) = c\,\mathbf{Fg}(a_n;t).$$

□

Exerciţiul 2.3. Aratati ca

$$\sum_{n\geq 0} c_n \frac{t^n}{n!} = \Bigl(\sum_{j\geq 0} a_j \frac{t^j}{j!}\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{k\geq 0} b_k \frac{t^k}{k!}\Bigr),$$

daca si numai daca

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$ □

Exerciţiul 2.4. Sa consideram un sir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ a carui functie generatoare este

$$\underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Atunci functia generatoare a sirului de sume partiale

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

este

$$s(t) = \frac{1}{1-t}\underline{a}(t).$$ □

Observatiile foarte simple de mai sus ne permit deja sa tragem niste concluzii remarcabile.

Exemplul 2.5 (**Numerele lui Fibonacci).** Sa consideram sirul lui Fibonacci definit de conditiile intiale, $F_0 = F_1 = F_2$ si relatia de recurenta

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{2.1}$$

Sa notam cu $F(t)$ functia generatoare a sirului lui Fibonacci. Daca inmultim (2.1) cu t^{n+2} obtinem

$$F_{n+2}t^{n+2} = t(F_{n+1}t^{n+1}) + t^2(F_n t^n).$$

Sa sumam egalitatea de mai sus dupa $n = 0, 1, 2, \dots$. Obtinem

$$F_2t^2 + F_3t^3 + F_4t^4 \cdots = t(F_1t + F_2t^2 + F_3t^3 \cdots) + t^2(F_0 + F_1t + F_2t^2 + \cdots)$$

Egalitatea de mai sus se poate rescrie

$$F(t) - (F_0 + F_1t) = t(F(t) - F_0) + t^2F(t)$$

$$\iff F(t) - (1+t) = (t+t^2)F(t) - t \iff F(t)(1-t-t^2) = 1.$$

Deducem de mai sus urmatoarea egalitatea surprinzatoare.

$$F(t) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Recunoastem la numitor ecuatia caracteristica a recurentei lui Fibonacci.

Putem descompune functia rationala de mai sus in fractii simple. Notam cu r_1, r_2 radacinile ecuatiei caracteristice

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Are loc egalitatea

$$1 - t - t^2 = (1 - r_1t)(1 - r_2t).$$

Deducem ca

$$\frac{1}{(1-t-t^2} = \frac{1}{(1-r_1t)(1-r_2t)} = \frac{A}{1-r_1t} + \frac{B}{1-r_2t} = \frac{A(1-r_2t) + B(t-r_1t)}{1-t-t^2}$$

$$\iff \begin{cases} A + B &= 1 \\ r_2A + r_1B &= 0. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este $r_1 - r_2$ de unde rezulta ca

$$A = \frac{r_1}{r_1 - r_2}, \;\; B = \frac{r_2}{r_2 - r_1}.$$

Prin urmare

$$F(t) = \frac{r_1}{r_1-r_2}\frac{1}{1-r_1t} + \frac{r_2}{r_2-r_1}\frac{1}{1-r_2t} = \frac{r_1}{r_1-r_2}\Big(\sum_{n\geq 0} r_1^n t^n\Big) + \frac{r_2}{r_2-r_1}\Big(\sum_{n\geq 0} r_2^n t^n\Big).$$

Rezulta de aici binecunoscuta formula

$$F_n = \frac{r_1^{n+1}}{r_1 - r_2} + \frac{r_2^{n+1}}{r_2 - r_1}.$$ □

Exemplul 2.6 (**Relatiile lui Newton**). Polynoamele simetrice elementare in n variabile $r_1, \dots, r_k$ sunt date de relatiile

$$c_0 = 1, \;\; c_1(r_1, \dots, r_n) = r_1 + \cdots + r_n, \;\; c_k(r_1, \dots, r_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} r_{i_1} \cdots r_{i_k}.$$

Este binecunoscut faptul ca aceste expresii satisfac relatiile lui Viète

$$C(t) = (1 - r_1t)(1 - r_2t) \cdots (1 - r_nt) = c_0 - c_1t + c_2t^2 + \cdots + (-1)^n c_n t^n.$$

Asa numita teorema fundamentala a polinoamelor simetrice spune ca orice polinom simetric S in variabilele $r_1, \dots, r_n$ se poate exprima ca un polinom in variabilele $c_1, \dots, c_n$,

$$S(r_1, \dots, r_n) = \bar{S}(c_1, \dots, c_n).$$

Mai mult, daca S are coeficienti intregi, atunci si $\bar{S}$ are coefficienti intregi.

De exemplu,

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 = c_1^2 - 2c_2. \tag{2.2}$$

Acum cateva sute de ani Isaac Newton a descris un procedeu foarte elegant de a exprima polinoamele simetrice

$$p_k(r_1, \ldots, r_n) = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k, \;\; k \geq 0,$$

ca polinoame in variabilele c_i. Astfel, egalitatea (2.2) se poate rescrie ca

$$p_2 = c_1^2 - 2c_2.$$

Chiar si cazul urmator, al polinomului p_3, pare a fi destul de complicat.

Newton a avut inspiratia sa descrie polinoamele p_r nu pe rand, unul cate unul, ci toate deodata, folosind functia lor generatoare,

$$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots,$$

careia i-a gasit o descriere foarte simpla. Iata argumentul lui Newton.

Sa observam in primul rand ca

$$\begin{aligned} P(t) &= n + (r_1 + \cdots + r_n)t + (r_1^2 + \cdots + r_2^2)t^2 + \cdots \\ &= (1 + r_1 t + r_1^2 t^2 + \cdots) + \cdots + (1 + r_n t + r_n^2 t^2) \\ &= \frac{1}{1 - r_1 t} + \cdots + \frac{1}{1 - r_n t} \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$P(t) - n = \sum_{k=1}^n \Big(\frac{1}{1 - r_k t} - 1 \Big) = \sum_{k=1}^n \frac{r_1 t}{1 - r_1 t}$$

Derivand polinomul $C(t)$ obtinem

$$\frac{d}{dt} C(t) = \frac{d}{dt} \prod_{k=1}^n (1 - r_k t)$$

$$= -r_1(1-r_2 t)\cdots(1-r_n t) - r_2(1-r_1 t)(1-r_3 t)\cdots(1-r_n t) - \cdots - r_n(1-r_1 t)\cdots(1-r_{n-1} t),$$

de unde deducem,

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = -\sum_{k=1}^n \frac{r_1}{1 - r_1 t} \Longrightarrow t\frac{C'(t)}{C(t)} = P(t) - n$$

Acum putem rescrie ultima egalitate sub forma

$$-tC'(t) = C(t)(P(t) - n).$$

Daca ne reamintim ca

$$C(t) = 1 - c_1 t + c_2 t^2 - \cdots, \;\; tC'(t) = -c_1 t + 2c_2 t^2 - 3c_3 t^3 + \cdots,$$

si

$$P(t) - n = p_1 t + p_2 t^2 + \cdots$$

deducem

$$c_1 t - 2c_2 t^2 + 3c_3 t^3 - \cdots = (1 - c_1 t + c_2 t^2 - \cdots)(p_1 t + p_2 t^2 + \cdots).$$

Relatiile lui Newton se obtin identificand coeficientii lui t^k in cele doua parti ale egalitatii de mai sus.

$$p_1 = c_1, \;\; p_2 - p_1 c_1 = -2c_2, \;\; p_3 - p_2 c_1 + p_1 c_2 = 3c_3,$$

$$p_k - p_{k-1} c_1 + \cdots + (-1)^{k-1} p_1 c_{k-1} = (-1)^{k+1} k c_k, \;\; \forall k \leq n \tag{2.3a}$$

$$p_k - p_{k-1}c_1 + \cdots + (-1)^n p_{k-n}c_n = 0, \;\; \forall k > n. \tag{2.3b}$$

De exemplu, avem

$$p_3 = p_2c_1 - p_1c_2 + 3c_3 = c_1(c_1^2 - 2c_2) - c_1c_2 + 3c_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3. \qquad \square$$

Exerciţiul 2.7. Descrieti p_4 ca un polinom in variabilele c_1, c_2, c_3, c_4. $\square$

Exerciţiul 2.8. Sa presupunem ca sunt date n multimi finite $A_1, \dots, A_n$. Notam

$$I_n := \{1, 2, \dots, n\}, \;\; A := \cup_{i \in I_n} A_i.$$

Pentru orice submultime $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ notam cu $r(S)$ cardinalul multimii

$$D_S = \big\{ a \in A; \;\; a \in A_s, \;\; \forall s \in S, \;\; a \notin A_k, \;\; \text{if} \;\; k \notin S \big\},$$

iar cu $R(S)$ cardinalul multimii

$$A_S := \bigcap_{j \in S} A_j.$$

(a) Folosind principiul includerii-excluderii demonstrati ca

$$r(S) = \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T|-|S|} R(T).$$

(b) Demonstrati ca

$$\sum_{S \subset I_n} r(S) x^{|S|} = \sum_{T \subset I_n} R(T)(x-1)^{|T|}, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

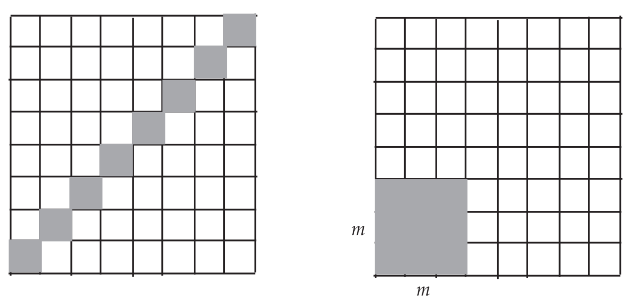

FIGURE 1. *Regiuni interzise pe o tablă de şah de tip* $n \times n$.

Exerciţiul 2.9. Sa consideram o tabla de şah de tip $n \times n$. Numim *distributie neagresiva* de turnuri pe aceasta tabla o distributie de n turnuri incat nu exista doua turnuri pe aceeasi linie sau coloana. Definim o *regiune* a tablei de sah ca fiind a submultime a multimii tuturor celor n^2 patratele (vezi Fig 1). Pentru o regiune A a tablei de sah si orice intreg $k \geq 0$ introducem urmatoarele notatii.

- $r_k(A)$:= numarul de distributii neagresive cu proprietatea ca exact k turnuri se gasesc in regiunea A.
- $R_k(A)$:= numarul de distributii neagresive cu proprietatea ca cel putin k turnuri se gasesc in regiunea A.
- $r_A(x) = \sum_{k \geq 0} r_k(A) x^k$, $R_A(x) = \sum_{k \geq 0} R_k(A) x^k$. Observati ca $r_A(0)$ este numarul de distributii neagresive cu proprietatea ca nici unul din turnuri nu se afla in regiunea “interzisa” A. Polinomul $r_A(x)$ se numeste *polinomul turnurilor asociat regiunii* A.

(a) Aratati ca pentru orice regiune A a tablei de sah are loc egalitatea

$$r_A(x) = R_A(x-1), \quad \forall k \geq 0.$$

(b) Calculati $r_A(x)$ cand A este fie multimea vida, fie una din regiunile colorate cu gri in Figure 1. □

3. Ecuaţii cu diferenţe

Sa consideram un sir de numere reale $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Sa notam cu $\underline{a}(t) := \mathbf{Fg}(a_n; t)$ functia generatoare a acestui sir. Putem considera *sirul diferentelor*

$$(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Putem sa ne gandim la sirul $\big\{(\Delta a)_n\big\}$ ca fiind derivata sirului $\{a_n\}$. Dorim sa exprimam functia generatoare a diferentelor finite cu ajutorul functiei generatora a sirului initial. Sa notam cu $\Delta\underline{a}(t)$ seria generatoare a sirului de diferente fiunite

Sa observam ca

$$(1-t)\underline{a}(t) = (1-t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) = a_0 + (a_1 - a_0)t + (a_2 - a_1)t^2 + \cdots = a_0 + t\Delta\underline{a}(t).$$

Deducem ca

$$\Delta\underline{a}(t) = \frac{(1-t)}{t}\underline{a}(t) - \frac{1}{t}a_0 = q(t)\underline{a}(t) - \frac{1}{t}a_0, \tag{3.1}$$

unde u $q(t)$ este functia rationala $\frac{1-t}{t}$.

Putem defini inductiv "derivatele de ordin superior"

$$(\Delta^{k+1}a)_n := \big(\,\Delta(\Delta^k a)\,\big)_n.$$

De exemplu,

$$(\Delta^2 a)_n = (\Delta a)_{n+1} - (\Delta a)_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Notam cu $\Delta^k\underline{a}(t)$ functia generatoare a sirului $\Delta^k a$. Aplicand (3.1) iterativ deducem

$$\begin{aligned}
\Delta^k\underline{a}(t) &= q\Delta^{k-1}\underline{a}(t) - \frac{1}{t}(\Delta^{k-1}a)_0 \\
&= q^2\Delta^{k-2}\underline{a}(t) - \frac{1}{t}\Big\{\,q(\Delta^{k-2}a)_0 + (\Delta^{k-1}a)_0\,\Big\} \\
\cdots &= q^k\underline{a} + \frac{1}{t}\Big\{\,q^{k-1}a_0 + q^{k-2}(\Delta a)_0 + \cdots + (\Delta^{k-1}a)_0\,\Big\}
\end{aligned}$$

Are loc deci identitatea

$$\Delta^k\underline{a}(t) = q^k\underline{a}(t) - \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{k-1} q^{k-1-j}(\Delta^j a)_0, \quad q := \frac{1-t}{t}. \tag{3.2}$$

Corolarul 3.1.

$$(\Delta^k a)_n = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{n-j}a_{n+j}, \quad \forall n, k \geq 0. \tag{3.3}$$

Demonstraţie. Din identitatea (3.2) deducem

$$t^k\Delta^k\underline{a}(t) = \underbrace{(1-t)^k\underline{a}(t)}_{\mathbf{I}} - \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1}(1-t)^{k-1-j}t^j(\Delta^j a)_0}_{\mathbf{II}}.$$

Termenul $(\Delta^k a)_n$ este coeficientul lui t^{k+n} in seria $t^k \Delta^k \underline{a}(t)$. Observand ca **II** este un polynom de grad mai mic decat k, deducem ca $(\Delta^k a)_n$ trebuie sa fie egal cu coeficientul lui t^{k+n} in **I**. Folosind binomul lui Newton deducem ca acest coeficient este egal cu expresia din partea dreapta a egalitatii (3.3). □

Definiţia 3.2. Spunem ca un sir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ satisface o *ecuatie cu diferenţe omogena de ordin* k daca exista niste constante reale $c_0, c_1, \dots, c_k$, $c_k \neq 0$ astfel incat

$$c_k(\Delta^k a)_n + c_{k-1}(\Delta^{k-1} a)_n + \cdots + c_1(\Delta a)_n + c_0 a_n = 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{3.4}$$

□

Daca sirul $\{a_n\}_{n\geq 0}$ cu functia generatoare $\underline{a}(t)$ satisface ecuatia (3.4) atunci rezulta din (3.2) ca seria $\underline{a}(t)$ satisface ecuatia

$$0 = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell \Big(q^\ell \underline{a}(t) - \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{\ell-1} q^{\ell-1-j} (\Delta^j a)_0 \Big), \quad q = \frac{1-t}{t}.$$

Inmultim ambele parti ale egalitatii de mai sus cu t^k si deducem

$$0 = \sum_{\ell=0}^{k} c_\ell \Big(t^{k-\ell}(1-t)^\ell \underline{a}(t) - t^{k-\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} t^j (1-t)^{\ell-1-j} (\Delta^j a)_0 \Big)$$

Prin urmare

$$\Big(\sum_{\ell=0}^{k} c_\ell t^{k-\ell}(1-t)^\ell \Big) \underline{a}(t) = \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell t^{k-\ell} \sum_{j=0}^{\ell-1} t^j (1-t)^{\ell-1-j} (\Delta^j a)_0$$

Sa observam ca termenul din partea dreapta a egalitatii de mai sus este un polinom $r(t)$ de grad mai mic decat k ai carui coeficienti sunt complet si unic determinati de "derivatele initiale"

$$a_0, (\Delta a)_0, \dots, (\Delta^{k-1} a)_0.$$

Ajungem la urmatoarea concluzie.

Corolarul 3.3. *Daca sirul* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *satisface ecuatia cu diferente* (3.4) *atunci functia lui generatoare* $\underline{a}(t)$ *este o functie rationala de forma*

$$\underline{a}(t) = \frac{r(t)}{c_k(1-t)^k + c_{k-1}t(1-t)^{k-1} + \cdots + c_0 t^k},$$

unde gradul numaratorului $r(t)$ *este mai mic decat gradul numitorului.* □

Exerciţiul 3.4. (a) Aratati ca pentru orice polinom de grad k

$$u(t) = u_k t^k + u_{k-1} t^{k-1} + \cdots u_0, \quad u_k \neq 0,$$

exista constantele $c_0, \dots, c_k$ unic determinate de egalitatea

$$u_k t^k + u_{k-1} t^{k-1} + \cdots u_0 = c_k(1-t)^k + c_{k-1}t(1-t)^{k-1} + \cdots + c_0 t^k.$$

(b) Aratati ca un sir de numere reale $\{a_n\}$ satisface o relatie de recurenta de forma

$$u_k a_{n+k} + u_{k-1} a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \quad \forall n \geq 0, \tag{3.5}$$

daca si numai daca satisface o ecuatie cu diferente de forma (3.4). Deduceti ca un sir $\{a_n\}$ satisface o relatie de recurenta de forma (3.5) daca si numai daca functia lui generatoare are forma

$$\underline{a}(t) = \frac{r(t)}{u_k t^k + u_{k-1} t^{k-1} + \cdots u_0},$$

unde gradul lui r este mai mic decat k. □

Exercițiul 3.5. Aratati ca urmatoarele afirmatii sunt echivalente.
(a) Sirul $\{a_n\}$ satisface ecuatia cu diferente

$$(\Delta^{k+1} a)_n = 0, \ \ \forall n \geq 0$$

(b) Exista constante $c_0, c_1, \dots, c_k$ astfel incat

$$a_n = \sum_{j=0}^{k} c_j \binom{n}{j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_{n-k}, \ \ \forall n \geq 0.$$

(c) Exista constante $d_0, d_1 \dots, d_k$ astfel incat

$$a_n = \sum_{j=0}^{k} d_j n^j, \ \ \forall n \geq 0.$$ □

Exercițiul 3.6. Sa consideram sirul $\{a_n\}_{n\geq 0}$ care satisface relatia de recurenta

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \ \ \forall n \geq 0.$$

Aratati ca satisface ecuatia cu diferente

$$(\Delta^2 a)_n - 3(\Delta a)_n + 2a_n = 0, \ \ \forall n \geq 0.$$ □

Exercițiul 3.7. Pentru orice intregi $0 < k \leq n$ notam cu $f_{n,k}$ numarul de submultimi de cardinal k ale multimii $\{1, \dots, n\}$ cu proprietatea ca nu contin nici o pereche de numere consecutive. Aratati ca

$$f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k},$$

si

$$\sum_{k=0}^{n} f_{n,k} = F_{n+2},$$

unde $\{F_n\}$ este sirul lui Fibonacci. □

4. Formula de inversiune a lui Lagrange

Pentru a formula rezultatul principal al acestei sectiuni trebuie sa facem cateva observatii preliminare.

Definim o *serie Laurent formala* ca fiind o expresie de forma

$$a_k t^{-k} + a_{-k+1} t^{-k+1} + a_{-1} t^{-1} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

O serie Laurent formala este cu alte cuvinte suma dintre o serie formala de puteri si un polinom in t^{-1}. Notam cu $\mathbb{R}[[t, t^{-1}]$ multimea seriilor Laurent formale.

Sa observam ca putem aduna si inmulti doua serii formale ca si cum are fi polinoame, iar multimea $\mathbb{R}[[t, t^{-1}]$ devine inel comutativ cu unitate cand este inzestrata cu operatiile de adunare si inmultire.

Operatorul de derivare formala D se extinde in mod evident si la seriile Laurent. Propozitia 1.11 se extinde si la cazul seriilor Laurent. In particular, D satisface regula lui Leibniz si pentru produsul a doua serii Laurent.

Daca $\underline{a}(t)$ este o serie Laurent formala, iar k este un intreg, vom nota cu $[t^k]\underline{a}$ coeficientul lui t^k in dezvoltarea lui $\underline{a}$. Coeficientul lui t^{-1} in $\underline{a}(t)$ se numeste *reziduul* seriei Laurent $\underline{a}$ si il vom nota cu $\operatorname{Res}\underline{a}$.

Propoziţia 4.1. *Daca* $\underline{a}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \in \mathbb{R}[[t]]$ *este o serie formala de puteri atunci*

$$a_n = [t^n]\underline{a}(t) = \frac{1}{n!}[t^0](D^n\underline{a}). \qquad \square$$

Definiţia 4.2. Pentru orice intreg k vom spune ca o serie Laurent $\underline{u}$ este $O(k)$, si scriem $\underline{u} = O(k)$, daca are forma

$$\underline{u}(t) = t^k\underline{a}(t), \quad \underline{a}(t) \in \mathbb{R}[[t]]. \qquad \square$$

Cu alte cuvinte,

$$\underline{u}(t) = O(k) \Longleftrightarrow \underline{u}(t) = u_k t^k + u_{k+1}t^{k+1} + \cdots .$$

De exemplu, faptul ca o serie Laurent $\underline{a}$ este o serie formala de puteri, adica nu apar puteri negative ale lui t, se poate scrie $\underline{a} = O(0)$.

Putem reformula principiul separarii formale folosind notatia O.

Teorema 4.3 (Principiul separarii formale in notatia O). *Fie* $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}[[t]]$. *Atunci*

$$\underline{u} = \underline{v} \Longleftrightarrow \underline{u}(t) - \underline{v}(t) = O(k), \quad \forall k \geq 0. \qquad \square$$

Sa observam ca daca

$$\underline{v}(t) = v_1 t + v_2 t^2 + \cdots = O(1),$$

iar $\underline{u}(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots = O(0)$ este o serie formala oarecare, atunci putem defini *compunerea* lor

$$\begin{aligned}\underline{u} \circ \underline{v}(t) &:= u_0 + u_1(v_1 t + v_2 t^2 + \cdots) + u_2(v_1 t + v_2 t^2 + \cdots)^2 + \cdots \\ &= u_0 + (u_1 v_1)t + (u_1 v_2 + u_1 v_1^2 + u_2 v_1^2)t^2 + \cdots .\end{aligned}$$

Coeficientul lui t^k in $\underline{u} \circ \underline{v}$ este descris de un *polinom* universal in variabilele $u_1, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots, v_k$.

Teorema 4.4 (Derivarea compunerii). *Fie* $\underline{u} \in \mathbb{R}[[t]]$ *si* $\underline{v} \in \mathbb{R}[[t]]$ *astfel incat* $\underline{v} = O(1)$. *Atunci*

$$D(\underline{u} \circ \underline{v}) = \big((D\underline{u}) \circ \underline{v} \big) \cdot (D\underline{v}). \tag{4.1}$$

$\square$

Exerciţiul 4.5. Sa presupunem ca $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}[[t]]$, iar $\underline{v} = O(1)$.

(a) Aratati ca pentru orice intreg pozitiv k are loc egalitatea

$$J_k(\underline{u} \circ v) - (J_k u) \circ v = O(k+1), \tag{4.2}$$

unde reamintim ca J_k este notatia pentru k-jet.

(b) Demonstrati egalitatea (4.1) folosind (4.2) si principiul separarii formale. $\square$

Exemplul 4.6 (Puterile intregi ale unei serii Laurent). Sa presunem ca $\underline{v}(t) = O(1)$. Atunci, pentru orice intreg $k > 0$ putem defini seria $(1+\underline{v})^{[-k]}$ ca fiind compunerea

$$(1+v)^{[-k]} := \underline{u} \circ \underline{v}(t), \quad \underline{u}(t) = (1+t)^{-k} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{n+k-1}{k-1} t^n.$$

Lasam cititorului sa verifice folosind principiul separarii formale ca pentru orice intreg pozitiv k are loc egalitatea

$$(1+\underline{v})^{[-k]}\cdot(1+\underline{v})^{k}=1,$$

adica seria $(1+\underline{v})^{[-k]}$ este inversa seriei $(1+\underline{v})^{k}$ in inelul $\mathbb{R}[[t]]$. Din aceasta cauza vom scrie $(1+\underline{v})^{-k}$ in loc de $(1+\underline{v})^{[-k]}$.

Mai general, daca $c\neq 0$, putem defini

$$(c+\underline{v})^{[-k]}:=c^{-k}(1+c^{-1}\underline{v})^{[-k]}.$$

In particular, deducem ca daca $\underline{u}=u_0+u_1t+u_2t^2+\cdots\in\mathbb{R}[[t]]$ este o serie formala astfel incat $J_0\underline{u}=u_0\neq 0$, atunci putem defini $\underline{u}(t)^n$ ca o serie formala, pentru *orice intreg* n. In plus, au loc egalitatile

$$\underline{u}^n\cdot\underline{u}^{-n}=1,\ \ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Daca mai sus alegem $n>0$, si apoi derivam folosind regula lui Leibniz deducem

$$(D\underline{u}^n)\underline{u}^{-n}+\underline{u}^n(D\underline{u}^{-n})=0\Longrightarrow\underline{u}^n(D\underline{u}^{-n})=-n\underline{u}^{n-1}(D\underline{u})\underline{u}^{-n}=-n\underline{u}^{-1}(D\underline{u}).$$

Inmultind ambele parti ale ultimei egalitati cu $\underline{u}^{-n}$ obtinem

$$D\underline{u}^{-n}=-n\underline{u}^{-n-1}(D\underline{u}).$$

Am demonstrat astfel urmatorul fapt.

$$D\underline{u}^m=m\underline{u}^{m-1}(D\underline{u}),\ \ \forall m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ \ \underline{u}\in\mathbb{R}[[t]],\ \ J_0\underline{u}\neq 0. \tag{4.3}$$

Sa observam ca daca $\underline{u}(t)$ este o serie Laurent formala, atunci o putem decrie ca un produs

$$\underline{u}(t)=t^k(q_0+q_1t+\cdots),$$

unde k este un intreg, iar $q_0\neq 0$. Daca n este un intreg, putem defini $\underline{u}^n$ prin egalitatea

$$\underline{u}^n:=t^{nk}(q_0+q_1t+\cdots)^n.$$

Egalitatea (4.3) se extinde si la acesta situatie mai generala. □

Definiţia 4.7. O serie

$$\underline{u}=u_1t+u_2t^2+\cdots=O(1)$$

se numeste *inversabila functional* (sau pe scurt, *f-inversabila*), daca exista o serie

$$\underline{v}=v_1t+v_2t^2+\cdots=O(1),$$

astfel incat

$$\underline{u}\circ\underline{v}(t)=\underline{v}\circ\underline{u}(t)=t.$$

Vom folosi notatia

$$\underline{v}(t)=\underline{u}^{\langle -1\rangle}(t),$$

si vom spune ca $\underline{v}(t)$ este *inversa functionala* a seriei $\underline{u}(t)$. □

Exerciţiul 4.8 (Teorema functiilor implicite formale). Aratati ca o serie $\underline{u}(t)=O(1)$ este f-inversabila daca si numai daca $[t]\underline{u}\neq 0$, adica coeficientul lui t in $\underline{u}$ nu este zero. In acest caz $\underline{u}$ admite o *unica* inversa functionala. □

Remarca 4.9. Sa presupunem ca $\underline{u}(t)$ este o serie formala care admite o inversa functionala $\underline{v}$. Atunci seria $\underline{u}$ este convergenta, daca si numai daca seria $\underline{v}$ este convergenta. Acest fapt este cunosctut in analiza sub numele de teorema *functiilor real analitice implicite*. □

Dorim sa rezolvam urmatoarea problema.

Daca $\underline{u}(t) = u_1 t + u_2 t^2 + \cdots$ *este o serie* f*-inversabila (adica* $u_1 \neq 0$*) sa se descrie coeficietii seriei inverse in functie de coeficietii seriei* $\underline{u}(t)$.

Problema de mai sus se poate rezolva prin metoda coeficientilor nedeterminati, dar calculul coeficietilor inversei $\underline{u}^{\langle -1 \rangle}$ devine oribil de complicat. Formula de inversiune a lui Lagrange descrie in esenta un algoritm de calcul al coeficientilor seriei inverse care de multe ori produce rezultate interesante. In demonstratia acestui algoritm vom avea nevoie de urmatorul fapt elementar dar fundamental.

Lema 4.10 (Teorema formala a reziduurilor). *(a) Daca* $\underline{a}(t)$ *este o serie Laurent, atunci reziduul derivatei* $D\underline{a}$ *este zero, adica*

$$\operatorname{Res} D\underline{a} = 0. \qquad \square$$

(b) Daca seria $\underline{u} \in \mathbb{R}[[t]]$ *este* f*-inversabila atunci are loc egalitatea*

$$\operatorname{Res} \underline{u}^{-1} D\underline{u} = 1.$$

Demonstraţie. Partea (a) rezulta din observatia ca monomul t^{-1} nu este derivata nici unei serii Laurent. Pentru a demonstra partea (b), scriem $\underline{u}$ sub forma

$$\underline{u} = u_1 t + u_2 t^2 + \cdots = t \underbrace{(u_1 + u_2 t + \cdots)}_{r},$$

unde $u_1 \neq 0$ deoarece $\underline{u}$ este f-inversabila. Atunci

$$\underline{u}^{-1} = t^{-1} r^{-1}, \;\; D\underline{u} = r + tDr \Longrightarrow \underline{u}^{-1} D\underline{u} = t^{-1} + r^{-1} Dr.$$

Sa observam ca $r^{-1} Dr \in \mathbb{R}[[t]]$, si prin urmare

$$\operatorname{Res} r^{-1} Dr = 0 \Longrightarrow \operatorname{Res} \underline{u}^{-1} D\underline{u} = \operatorname{Res}(t^{-1} + r^{-1} Dr) = \operatorname{Res} t^{-1} = 1. \qquad \square$$

Teorema 4.11 (Formula de inversiune a lui Lagrange). *Fie*

$$u(t) = u_1 t + u_2 t^2 + \cdots \in \mathbb{R}[[t]]$$

o serie f*-inversabila, adica* $u_1 \neq 0$. *Notam cu* $s(t) = s_1 t + s_2 t^2 + \cdots$ *inversa ei functionala. Daca scriem* $u(t)$ *sub forma*

$$u(t) = t\, r(t), \;\; r(t) = u_1 + u_2 t + u_3 t^2 + \cdots,$$

atunci

$$n s_n = n [t^n] s(t) = \operatorname{Res} u^{-n} = [t^{n-1}] r(t)^{-n}.$$

Demonstratie. Sa scriem

$$s(t) = \sum_{m \geq 1} s_m t^m.$$

Atunci are loc egalitatea

$$t = s(u(t)) = \sum_{m \geq 1} s_m u^m.$$

Derivand obtinem

$$1 = \sum_{m \geq 1} m s_m u^{m-1} Du.$$

Inmultind cu u^{-n} deducem

$$u^{-n} = \sum_{m \geq 1} m s_m u^{m-1-n} Du.$$

Sa observam ca daca $m \neq n$, atunci

$$u^{m-1-n}Du = \frac{1}{m-n}Du^{m-n},$$

si din teorema formala a reziduurilor deducem

$$\operatorname{Res} u^{m-1-n}Du = 0, \;\; \forall m \neq n.$$

Deducem ca

$$\operatorname{Res} u^{-n} = ns_n \operatorname{Res} u^{-1}Du.$$

Folosind partea (b) a teoremei formale a reziduurilor deducem

$$ns_n = \operatorname{Res} u^{-n} = \operatorname{Res}(t^{-n}r^{-n}) = [t^{-1}]\big(\, t^{-n}r(t)^{-n}\,\big) = [t^{n-1}]r(t)^{-n}. \qquad \square$$

Exercițiul 4.12. Sa presupunem ca seria $u(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ este f-inversabila, si sa notam

$$v := u^{\langle -1\rangle}.$$

Folosind tehnica de demonstratie a Teoremei 4.11 aratati ca

$$[t^n]v^k = \frac{k}{n}[t^{n-k}]\Big(\frac{t}{u}\Big)^n = \frac{k}{n}[t^{-k}]u^{-n}. \tag{4.4}$$

In particular, daca $u(t)$ are forma

$$u(t) = \frac{t}{f(t)}, \;\; f(t) = f_0 + f_1t + \cdots \in \mathbb{R}[[t]], \;\; f_0 \neq 0,$$

atunci

$$[t^n]v^k = \frac{k}{n}[t^{n-k}]f(t)^n. \tag{4.5}$$

$\square$

Exemplul 4.13. Formula de inversiune se poate intelege cel mai bine daca o ilustram pe un exemplu. Sa presupunem ca o serie formala de puteri $s(t)$ satisface o ecuatie de forma

$$s = t(1+as)^{\ell},$$

unde ℓ este un intreg, iar $a \neq 0$ un numar real. Daca definim

$$u(t) := t(1+at)^{-\ell},$$

deducem ca

$$u(s(t)) = t$$

adica s este inversa functionala a seriei u. Putem scrie

$$s = s_1t + s_2t^2 + \cdots,$$

iar formula de inversiune a lui Lagrange ne spune ca

$$s_n = \frac{1}{n}[t^{n-1}](1+at)^{n\ell}.$$

Daca $\ell > 0$, atunci deducem din formula binomului lui Newton ca

$$s_n = \frac{1}{n}\binom{n\ell}{n-1}a^{n-1} = \frac{1}{n\ell+1}\binom{n\ell+1}{n}a^{n-1}. \tag{4.6}$$

Daca $\ell < 0$, atunci din egalitatea (1.3) deducem

$$(1+at)^{-n|\ell|} = \sum_{m\geq 0}(-1)^m\binom{m+n|\ell|-1}{m}a^mt^m,$$

si prin urmare

$$s_n = \frac{1}{n}\binom{n+n|\ell|-2}{n-1}(-a)^{n-1} = \frac{1}{n(|\ell|+1)-1}\binom{n(|\ell|+1)-1}{n}(-a)^{n-1} \tag{4.7}$$

□

Exemplul 4.14. Seria de puteri

$$u(t) = t - \frac{1}{1!}t^2 + \frac{1}{2!}t^3 - \frac{1}{3!}t^4 + \cdots = te^{-t}$$

este inversabila. Inversa ei este seria formala

$$r(t) = r_1 t + r_2 t^2 + \cdots ,$$

unde

$$r_n = \frac{1}{n}[t^{n-1}]e^{nt} = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Exemplul acesta este foarte interesant din cauza ca seria $u(t)$ apare in combinatorica in problema numararii arborilor, adica a grafurilor conexe care nu au cicluri. □

Exemplul 4.15 (Numerele lui Catalan). Pentru orice intreg $n \geq 1$ vom nota cu C_n numarul de posibilitati de descompunere a unui polygon convex cu $n+2$ varfuri *etichetate*, in n triunghiuri, cu ajutorul cu ajutorul a $(n-1)$ diagonale care nu se intersecteaza. Astfel de triangulari le vom numi *triangulari simple*. Numerele C_n se numesc numerele lui Catalan. Figura 2 arata ca $C_1 = 1$ si $C_2 = 2$.

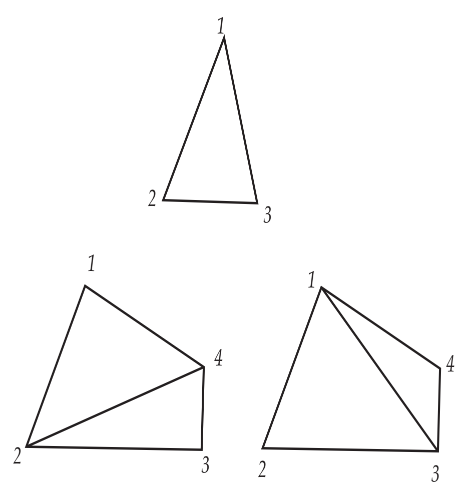

FIGURE 2. *Triangulari ale unui polygon convex cu ajutorul diagonalelor.*

Sa construim functia generatoare

$$C(t) = C_1 t + C_2 t^2 + \cdots .$$

Dorim sa gasim o relatie de recurenta pentru numerele lui Catalan pe care sa o putem exprima in termeni de functii generatoare. Vom nota cardinalul unei multimi A cu $|A|$.

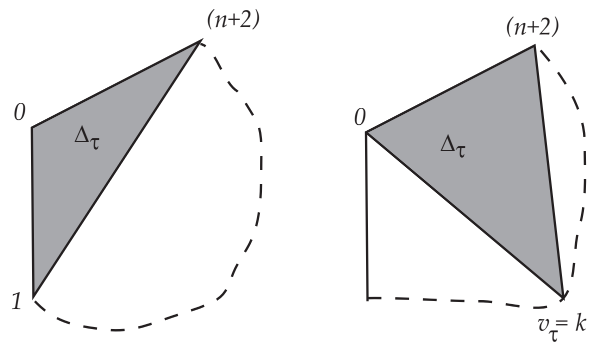

FIGURE 3. *Triunghiul* $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$.

Fixam $n \geq 2$. Numarul C_{n+1} este numarul de triangulari simple ale uni poligon convex $\mathcal{P}$ cu $(n+3)$ varfuri $0, 1, \dots, (n+2)$. Notam cu $\mathcal{T}$ multimea acestor triangulari. Pentru orice triangulare $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}$, latura $[0, (n+2)]$ a poligonului $\mathcal{P}$ apartine exact unui singur triunghi al triangularii $\boldsymbol{\tau}$. Notam acest triunghi cu $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$, iar cu $v_{\boldsymbol{\tau}}$ varful lui $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$ diferit de 0 si $(n+2)$; vezi Figura 3. Este evident ca

$$v_{\boldsymbol{\tau}} \in \{1, 2, \dots, n+1\}.$$

Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ notam

$$\mathcal{T}_k := \big\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T};\ \ v_{\boldsymbol{\tau}} = k, \big\}.$$

Are loc egalitatea

$$|\mathcal{T}| = \sum_{k=2}^{n+1} |\mathcal{T}_k|.$$

Distingem doua cazuri.

Cazul 1. $k = 1, (n+1)$. Fie $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}_k$. In acest caz tringhiul $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$ are o singura latura care este diagonala a lui $\mathcal{P}$. Aceasta diagonala imparte $\mathcal{P}$ in doua parti: triunghiul $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}$ si un poligon cu $(n+2)$ varfuri. Deducem ca

$$|\mathcal{T}_k| = C_n, \ \ k = 1, (n+1).$$

Cazul 2. $2 \leq k \leq n$. In acest caz, diagonalele $[0, k]$ si $[k, (n+2)]$ impart $\mathcal{P}$ in doua poligoane convexe: un poligon $\mathcal{P}'$ cu $(k+1)$ varfuri, $0, \dots, k$, si un poligon $\mathcal{P}''$ cu $(n+3-k)$ varfuri, $k, \dots, (n+2)$. Rezulta ca

$$|\mathcal{T}_k| = C_{k-1} C_{n+1-k}.$$

Deducem din discutia de mai sus ca

$$C_{n+1} = 2C_n + \sum_{k=2}^{n} C_{k-1} C_{n+1-k} = 2C_n + \sum_{j=1}^{n-1} C_j C_{n-j}, \ \ \forall n \geq 2.$$

Inmultind egalitatea de mai sus cu t^{n+1}, si apoi sumand dupa $n \geq 2$ deducem identitatea

$$\sum_{n\geq 2} C_{n+1} t^{n+1} = 2t \sum_{n \geq 2} C_n t^n + t \sum_{n\geq 2} \Big(\sum_{j=1}^{n-1} C_j C_{n-j} \Big) t^n,$$

pe care o putem rescrie

$$C(t) - t - 2t^2 = C(t) - C_1 t - C_2 t^2 = 2t\big(\, C(t) - C_1 t\,\big) + tC(t)^2$$

$$\Longrightarrow C(t) - t = 2tC(t) + tC(t)^2 \Longrightarrow C(t) = t\big(\, 1 + C(t)\,\big)^2.$$

Suntem exact in situatia descrisa in Exemplul 4.13, cazul $\ell = 2$, $a = 1$. Deducem din (4.6)

$$C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□

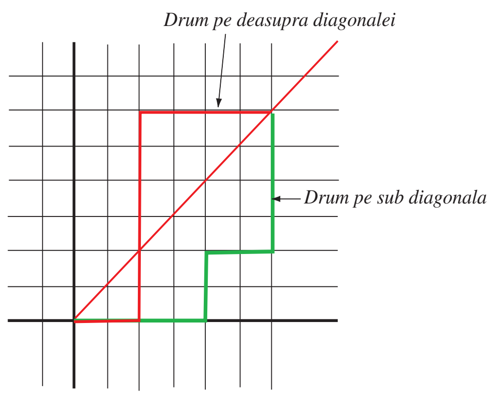

FIGURE 4. *Drumuri laticiale.*

Exercițiul 4.16. Fie P si Q doua puncte laticiale in plan, adica $P, Q \in \mathbb{Z}^2$. Un *drum laticial* de lungime n de la P la Q este un sir de puncte

$$P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{Z}^2$$

cu urmatoarele proprietati.

- $P_0 = P$, $P_n = Q$.
- Pentru orice $k = 1, \dots, n$, avem fie $P_k = P_{k-1} + (1, 0)$, fie $P_k = P_{k-1} + (0, 1)$.

Cu alte cuvinte de-a lungul unui drum, pasii au lungime 1 si sunt indreptati fie catre Est, fie catre Nord. Sa notam cu $T(Q, P)$ numarul de drumuri laticiale de la P la Q care nu trec deasupra diagonalei $y = x$ (vezi Figura 4). Aratati ca daca

$$P = (0, 0), \quad Q = (n, n)$$

aratati ca

$$T(Q, P) = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□

5. SIRURI DE POLINOAME

In aceasta sectiune initiem descrierea unui formalism modern care se ascunde in spatele multor probleme din combinatorica. Intr-o forma sau alta, aceste trucuri erau cunoscute marilor clasici ca Euler, Lagrange, Gauss, Cauchy. In cele ce urmeaza vom conveni ca gradul polinomului trivial $p = 0$ este $-\infty$.

Definiția 5.1. (a) Un *sir bazic de polinoame* este un sir de polinoame $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, $n \geq 0$ cu proprietatea ca

$$\operatorname{grad} p_n(x) = n, \quad \forall n \geq 0.$$

Sirul bazic se numeste *normalizat* daca $p_0(x) = 1$, $p_n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$.

(b) Un *sir binomial* este un sir bazic normalizat $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ cu proprietatea ca

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y), \quad \forall n \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

(c) Dat fiind un sir basic $\{p_n(x)\}$, definim functia lui generatoare prin

$$P_x(t) := \mathbf{Fg}_{\exp}(p_n(x); t) = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(x)t^n}{n!}.$$

Aceasta serie poate fi gandita in doua moduri: fie ca o serie de puteri ai carui coeficieti sunt polinoame, fie ca o familie de serii de puteri parametrizata de variabila x. $\square$

Exemplul 5.2. (a) Formula binomului lui Newton ne spune ca sirul de polinoame $1, x, x^2, \dots$ este un sir binomial. Functia lui generatoare este

$$1 + \frac{1}{1!}xt + \frac{1}{2!}(xt)^2 + \cdots = e^{tx}.$$

(b) Sa presupunem ca $g(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ este o serie f-nversabila,

$$g(t) = g_1 t + g_2 t^2 + \cdots, \quad g_1 \neq 0.$$

Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat formam seria formala

$$G_x(t) := e^{xg(t)}.$$

Atunci $G_x(t)$ admite o dezvoltare de forma

$$G_x(t) = p_0(x) + \frac{p_1(x)}{1!}t + \frac{p_2(x)}{2!}t^2 + \cdots,$$

unde $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este un sir basic normalizat.

Sa observam ca

$$G_x(t)G_y(t) = e^{(x+y)t} = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(x+y)}{n!}t^n$$

Pe de alta parte

$$G_x(t)G_y(t) = \Big(\sum_{k\geq 0} \frac{p_k(x)}{k!}t^k\Big) \cdot \Big(\sum_{j\geq 0} \frac{p_j(y)}{j!}t^j\Big)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_{n-k}(y}{k!(n-k)!} \right) t^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k+j=n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y) \right) \frac{t^n}{n!}.$$

Rezulta ca sirul de polinoame $\{p_n(x)\}$ este un sir binomial. Sa observam ca situatia (b) contine ca un caz special situatia (a). Pentru a vedea acest lucru consideram seria

$$M_x(t) = \sum_{n\geq 0} x^n \frac{t^n}{n!} = e^{xt}.$$

Rezulta ca daca alegem $g(t)$ de forma cea mai simpla posibila, $g(t) = t$, obtinem sirul binomial fundamental $\{x^n\}_{n\geq 0}$.

(c) Pentru orice $n \geq 1$ definim

$$[x]_n := x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

Pentru uniformitate definim $[x]_0 = 1$. Sa observam ca sirul $\{[x]_n\}$ este un sir bazic normalizat. Vom arata prin doua metode diferite ca sirul $[x]_n$ este un sir binomial.

Prima metoda este prin inductie. Trebuie sa demonstram identitatea

$$[x+y]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y]_k, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Daca fixam x arbitrar, este suficient sa demonstram ca aceasta identitate este valabila pentru orice y *intreg nenegativ*. Vom arata prin *inductie dupa* y ca identitatea de mai sus este valabila pentru orice n.

Cand $y = 0$ afirmatia este triviala. Pentru pasul inductiv sa observam ca pentru orice numar real z are loc identitatea

$$[z+1]_n - [z]_n = n[z]_{n-1}, \ \ \forall n \geq 1.$$

Prin urmare,

$$[x+(y+1)]_n = [x+y]_n + n[x+y]_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y]_k + n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} [x]_{n-k}[y]_{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y]_k + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} [x]_{n-k}[y]_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}\big([y]_k + k[y]_{k-1} \big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y+1]_k.$$

Cealalta metoda de demonstratie foloseste functia generatoare a acestui sir

$$S_x(t) = \sum_{n\geq 0} [x]_n \frac{t^n}{n!}.$$

Conform Exercitiului 1.10, pentru x fixat, seria $S_x(t)$ este convergenta cand $|t| < 1$, iar suma ei este functia $t \mapsto (1+t)^x$. Daca scriem

$$(1+t)^x = e^{x\log(1+t)}$$

observam ca ne aflam exact in situatia descrisa in exemplul (b) unde

$$g(t) = \log(1+t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots .$$

Aceasta arata din nou ca sirul $\{[x]_n\}$ este binomial. □

Exemplul 5.2(b) ne arata ca daca $\mathbf{Fg}_{\exp}(p_n(x); t)$ are forma

$$P_x(t) = e^{xs(t)}, \ \ s(t) \in \mathbb{R}[[t]], \ \ s(t) = O(1), \ \ [t^1]s(t) \neq 0$$

atunci sirul $\{p_n(x)\}$ este binomial. In cele ce urmeaza, dorim sa producem alte criterii de recunoastere ale sirurilor binomiale.

Definiţia 5.3. Un *operator admisibil* este o aplicatie

$$L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \ \ \mathbb{R}[x] \ni p \longmapsto Lp$$

care satisface urmatoarele conditii.

- L este liniar, adica,
$$L(\lambda p + \mu q) = \lambda Lp + \mu Lq, \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \ p, q \in \mathbb{R}[x].$$
- $\operatorname{grad} Lp \leq \operatorname{grad} p$, $\forall p \in \mathbb{R}[x]$.

(b) Un *operator diferential* este un operator admisibil L care satisface conditiile

$$L1 = 0, \quad \operatorname{grad} Lp = \operatorname{grad} p - 1, \quad \forall p \in \mathbb{R}[x], \quad \operatorname{grad} p > 0. \qquad \square$$

Vom nota cu $\mathbf{Op}$ multimea operatorilor admisibili si cu $\mathbf{DiffOp}$ multimea operatorilor diferentiali. Compunerea a doi operatori admisibili S, T este un operator admisibil $S \circ T$. Pentru a simplifica notatia, vom scrie ST in loc de $S \circ T$. De asemenea, vom folosi notatia

$$S^k := \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{k}.$$

Definim

$$\mathbf{Op}^* := \bigl\{ T \in \mathbf{Op}^* : \ \ \operatorname{grad} Tp = \operatorname{grad} p, \ \ \forall p \in \mathbb{R}[x] \bigr\}.$$

Exemplul 5.4. (a) Operatorul

$$D_x : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \ \ D_x p = \frac{dp}{dx}$$

este un operator diferential.
(b) Operatorul

$$\Delta : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \ \ (\Delta p)(x) = p(x+1) - p(x)$$

este operator diferential.
(c) Pentru un numar real h definim $E_h : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ prin egalitatea

$$(E_h p)(x) = p(x+h).$$

E_h este un operator admisibil numit *operatorul de translatie cu* h. Sa observam ca

$$\Delta = E_1 - \mathbb{1},$$

unde $\mathbb{1}$ este aplicatia identica $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$.
(d) *Operatorul lui Bernoulli*

$$B : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \ \ p \longmapsto \int_x^{x+1} p(t)dt$$

este un operator admisibil care pastreaza gradul, adica $B \in \mathbf{Op}^*$.
(e) Dat fiind un operator diferential $\mathbb{L}$, si o serie formala de puteri

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n,$$

putem forma operatorul admisibil

$$u(\mathbb{L}) = \sum_{n \geq 0} u_n \mathbb{L}^n,$$

a carui actiune pe un polinom p este data de

$$u(\mathbb{L})p = u_0 p + u_1 \mathbb{L} p + \cdots + u_n \mathbb{L}^n p + \cdots.$$

Sa observam ca *suma de mai sus este finita* pentru ca $\mathbb{L}^n p = 0$, pentru orice $n > \operatorname{grad} p$. De exemplu, are loc egalitatea

$$E_h = e^{hD_x}. \tag{5.2}$$

Pentru a vedea acest lucru, folosim formula lui Taylor care spune ca

$$(E_h p)(x) = p(x+h) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} p^{(n)}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} (D_x^n p)(x) = \Bigl(\sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} D_x^n \Bigr) p(x).$$

In particular, rezulta ca

$$\Delta = e^{D_x} - \mathbb{1}. \tag{5.3}$$

□

Exercițiul 5.5. Aratati ca daca $L \in \mathbf{DiffOp}$, iar $u, v \in \mathbb{R}[[t]]$, atunci

$$u(L)v(L) = (u \cdot v)(L) \;\text{ si }\; u(L) = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$$ □

Propoziția 5.6. *Orice operator $\mathbb{T} \in \mathbf{Op}^*$ este inversabil, iar inversul lui este un operator admisibil care pastreaza gradul.*

Demonstrație. Sa observam mai intai ca $\mathbb{T}$ este injectiv. Intr-adevar, daca $\mathbb{T}p = \mathbb{T}q$ atunci

$$\mathbb{T}(p-q) = 0 \Longrightarrow \operatorname{grad}(p-q) = \operatorname{grad} 0 = -\infty \Longrightarrow p - q = 0.$$

Sa notam cu $\mathbb{R}[x]_n$ multimea polinoamelor de grad $\leq n$. Este clar ca

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}[x]_n \subset \mathbb{R}[x]_n,$$

si vom arata ca aplicatia $\mathbb{T} : \mathbb{R}[x]_n \subset \mathbb{R}[x]_n$ este surjectiva.

Consideram matricea $A = (a_{ij})_{0,\leq i,j \leq n}$ definita de egalitatile

$$\mathbb{T}x^j = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x^i, \;\; j = 0, \dots, n.$$

Sa observam ca daca

$$q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x,$$

atunci

$$\mathbb{T}q = p_0 + \cdots + p_n x^n,$$

unde

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Privim egalitatea (5.4) ca pe un sistem liniar, in care necunoscutele sunt coeficientii q_i. A rezolva ecuatia

$$\mathbb{T}q = p, \;\; p \in \mathbb{R}[x]_n$$

in care necunoscuta este polinomul $q \in \mathbb{R}[x]_n$, revine la a rezolva sistemul liniar (5.4). Deoarece $\mathbb{T}$ este injectiv, deducem ca sistemul de mai sus in care $p_j = 0$ are doar solutia triviala $q_i = 0$. Rezulta ca $\det A \neq 0$, adica matricea A este inversabila. Rezulta ca pentru orice polinom $p \in \mathbb{R}[x]_n$ exista un singur polinom $q \in \mathbb{R}[x]_n$ astfel incat $\mathbb{T}q = p$. □

Exemplul 5.7. (a) Operatorul de translatie E_h pastreaza gradul, $E_h \in \mathbf{Op}^*$. Prin urmare este bijectiv. Inversul lui este operatorul E_{-h}.
(b) Operatorul lui Bernoulli pastreaza gradul si prin urmare este inversabil. Sa observam ca $D_x B = \Delta$, si deci putem scrie, *formal*

$$B = \Delta D^{-1}.$$

Egalitatea de mai sus ar trebui pusa intre ghilimele fiindca operatorul de derivare D nu este inversabil.

□

Sa presupunem ca $\{p_n(x)\}$ este un sir bazic. Acestui sir ii asociem o aplicatie

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\{p_n\}} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \;\; \mathcal{R}\big(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \big) = a_0 p_0 + a_1 p_1(x) + \cdots + a_n p_n(x).$$

Este evident ca $\mathcal{R}$ este un operator admisibil. Il vom numi *reperul* asociat sirului bazic $\{p_n(x)\}$. Sa observam ca

$$\mathcal{R}(x^n) = p_n(x), \;\; \forall n \geq 0,$$

si prin urmare

$$\operatorname{grad} \mathcal{R}q = \operatorname{grad} q, \;\; \forall q \in \mathbb{R}[x], \;\; q \neq 0. \tag{5.5}$$

Rezulta ca $\mathcal{R} \in \mathbf{Op}^*$. Folosind Propozitia 5.6 deducem urmatorul rezultat.

Corolarul 5.8. *Reperul $\mathcal{R}$ asociat unui sir basic $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este bijectiv, iar inversul lui este un operator admisibil $\mathcal{R}^{-1}$ care satisface conditiile*

$$\mathcal{R}^{-1} p_n = x^n, \;\; \forall n \geq 0,$$
$$\operatorname{grad} \mathcal{R}^{-1} q = \operatorname{grad} q, \;\; \forall q \in \mathbb{R}[x]. \tag{5.6}$$

□

Corolarul 5.9. *Fie $\{p_n\}$ un sir basic. Orice polinom q de grad n se descompune unic sub forma*

$$q(x) = q_0 p_0(x) + q_1 p_1(x) + \cdots + q_n p_n(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $q_0, \dots, q_n$ sunt numere reale.

Demonstraţie. Polinomul $\mathcal{R}q(x)$ admite o descompunere unica de forma

$$\mathcal{R}q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k.$$

Prin urmare

$$q(x) = \mathcal{R}^{-1}\big(\mathcal{R}q(x) \big) = \sum_{k=0}^{n} q_k (\mathcal{R}x^k) = \sum_{k=0}^{n} q_k p_k(x).$$ □

Sa presupunem ca $p = \{p_n(x)\}$ si $q = \{q_n(x)\}$ sunt doua siruri bazice cu repere $\mathcal{R}_p$ si respectiv $\mathcal{R}_q$. Atunci avem un operator liniar

$$\mathcal{T}_{q/p} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \;\; \mathcal{T}_{p/q} := \mathcal{R}_p \mathcal{R}_q^{-1}$$

Sa observam ca

$$\mathcal{T}_{q/p} p_n = \mathcal{R}_q((\mathcal{R}_p^{-1} p_n) = \mathcal{R}_q(x^n) = q_n.$$

Vom spune c $\mathcal{T}_{q/p}$ este operatorul de tranzitie de la p la q. Acestui operator ii asociem matricea infinita

$$A(q,p) = (a_{ij})_{0 \leq i,j}$$

definita de egalitatile

$$q_j = \sum_{j=0}^{i} a_{ij} p_i$$

Aceasta este o matrice triunghiulara superior, adica are forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{22} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Vom spune ca $A(q,p)$ este *matricea tranzitiei* de la p la q. Aceasta matrice este inversabila, iar inversa ei este matricea tranzitiei de la q la p. Sa observam ca operatorul reper asociat sirului $\{p_n\}$ este exact operatorul de tranzitie de la sirul canonic $\{x^n\}$ la sirul $\{p_n(x)\}$.

Exemplul 5.10. (a) Sa consideram sirurile bazice $\{\, p_n(x) = (x-1)^n \,\}$ si $\{\, q_n(x) = x^n \,\}$. Din formula binomului lui Newton deducem

$$x^n = \big(1 + (x-1)\,\big)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (x-1)^m$$

si deducem ca matricea tranzitiei de la p la q este data de

$$A = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \cdots \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Recunoastem mai sus triunghiul lui Pascal.

Un sir de numere reale se poate gandi ca o matrice infinita cu o sigura linie

$$X = [x_0, x_1 \cdots]$$

Prodususl $Y = XA$ este o matrice infinita cu o singura linie

$$Y = [y_0, y_1, \cdots],$$

unde

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k, \quad \forall n \geq 0.$$

Pentru a calcula matricea inversa a lui A folosim din nou formula lui Newton

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k$$

si deducem ca matricea inversa a lui A este

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & -\binom{3}{0} & \cdots \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & -\binom{3}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Rezulta ca

$$X = (XA)A^{-1} = YB,$$

si deci

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k. \qquad \square$$

Rezulta de aici *formula de inversiune binomiala* (comparati cu Exercitiul 3.5(b).)

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k, \quad \forall n \geq 0 \Longleftrightarrow x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k, \quad \forall n \geq 0. \tag{5.7}$$

□

Exercițiul 5.11. Consideram doua siruri de numere reale $\{x_n\}_{n\geq 0}$ si $\{y_n\}_{n\geq 0}$. Formam seriilor lor generatoare de tip exponential

$$x(t) = \sum_{n\geq 0} x_n \frac{t^n}{n!}, \quad y(t) = \sum_{n\geq 0} y_n \frac{t^n}{n!}.$$

Aratati ca

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k, \quad \forall n \geq 0 \Longleftrightarrow y(t) = e^t x(t)$$

si deduceti de aici formula de inversiune binomiala. □

Definiția 5.12. Dat fiind un sir bazic $\{\, p_n(x)\,\}$ cu reper $\mathcal{R}$, definim

$$\mathbb{L} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad \mathbb{L} := \mathcal{R} D_x \mathcal{R}^{-1}$$

si il vom numi *operatorul fundamental* al sirului $\{p_n(x)\}$. □

Propoziția 5.13. *Fie un sir basic normalizat $\{p_n(x)\}$ cu operator fundamental $\mathbb{L}$. Atunci au loc urmatoarele.*

(a) $\mathbb{L}$ este un operator diferential care satisface

$$\mathbb{L} p_n = n p_{n-1}, \quad \forall n \geq 1. \tag{5.8}$$

(b) Daca L este un operator diferential care satisface (5.8), atunci $L = \mathbb{L}$.

Demonstrație. (a) Fie p un polinom de grad n. Atunci

$$\mathbb{L}(p) = \mathcal{R} D_x (\mathcal{R}^{-1} p).$$

Din (5.6) deducem ca $\operatorname{grad} \mathcal{R}^{-1} p = n$, si prin urmare,

$$\operatorname{grad} D_x(\mathcal{R}^{-1} p) = n - 1.$$

Folosind (5.5) deducem ca

$$\operatorname{grad} \mathbb{L} p = \operatorname{grad} \mathcal{R} D_x(\mathcal{R}^{-1} p) = (n-1)$$

care arata ca $\mathbb{L}$ este operator diferential. Sa observam acum ca

$$\mathbb{L} p_n = \mathcal{R} D_x (\mathcal{R}^{-1} p_n) = \mathcal{R} D_x)(x^n) = n \mathcal{R} x^{n-1} = n p_{n-1}(x).$$

(b) Fie L un operator diferential care satisface (5.8). Definim $S = \mathcal{R}^{-1} L \mathcal{R}$. Atunci

$$S x^n = \mathcal{R}^{-1}(L p_n) = \mathcal{R}^{-1}(n p_{n-1}) = n x^{n-1}.$$

Aceasta arata ca

$$S q = D_x q, \quad \forall q \in \mathbb{R}[x].$$

Cu alte cuvinte

$$\mathcal{R}^{-1}L\mathcal{R} = D_x \Longrightarrow L = \mathcal{R}D_x\mathcal{R}^{-1} = \mathbb{L}. \qquad \square.$$

Exemplul 5.14. Operatorul fundamental al sirului $\{x^n\}$ este operatorul obisnuit de derivare D_x. Deoarece

$$\Delta[x]_n = [x+1]_n - [x]_n = n[x]_{n-1},$$

deducem ca operatorul fundamental al sirului $\{[x]_n\}$ este Δ. $\square$

Propoziţia 5.15. *Orice operator diferential L este operatorul fundamental al unui* unic *sir bazic* normalizat.

Demonstraţie. Vom construi inductiv un astfel de sir. Unicitatea va rezulta imediat din metoda de constructie. Vrem sa construim un sir bazic normalizat $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$, astfel incat $Lp_n = np_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

p_0 este unic determinat pentru ca $p_0 = 1$. Presupunem ca am determinat $p_0, \dots, p_{n-1}$, si dorim sa-l gasim pe p_n. Observam ca $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ formeaza o baza a spatiului $\mathbb{R}[x]_{n-1}$ constand din polinoame de grad $\leq n-1$. Cautam p_n sub forma

$$p_n(x) = ax^n + c_{n-1}p_{n-1}(x) + \cdots + c_1p_1(x) + c_0.$$

Deoarece dorim ca $p_n(0) = 0$, si deja stim ca $p_k(0) = 0$, $\forall 1 \leq k \leq n-1$, deducem ca $c_0 = 0$. Polinomul $L(x^n)$ are gradul $n-1$, si deci admite o descompunere de forma

$$L(x^n) = \ell_0 + \ell_1p_1(x) + \cdots + \ell_{n-1}p_{n-1}(x), \quad \ell_{n-1} \neq 0.$$

Coeficientii ℓ_i trebuiesc ganditi ca fiid cunoscuti, pentru ca operatorul L este cunoscut. Dorim sa determinam numarul a si coeficentii c_k in functie de numerele ℓ_i. Deducem ca

$$np_{n-1}(x) = Lp_n(x) = aL(x^n) + \sum_{k=1}^{n-1} kc_kp_{k-1}(x)$$

$$= a\ell_{n-1}p_{n-1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(a\ell_{k-1} + kc_k)p_{k-1}(x)$$

Rezulta

$$a = \frac{n}{\ell_{n-1}}, \quad c_k = -\frac{a\ell_{k-1}}{k} = -\frac{n\ell_{k-1}}{k\ell_{n-1}}, \quad \forall k = 1, \dots, n-1. \qquad \square$$

Propozitiile 5.13 si 5.15 implica existenta unei bijectii

operatori diferentiali $\longleftrightarrow$ siruri bazice *normalizate*.

Aceasta bijectie va juca un rol fundamental in cele ce urmeaza.

Sa consideram un sir bazic *normalizat* $\{p_n(x)\}$ cu operatorul de referinta $\mathcal{R}$ si operator fundamental $\mathbb{L}$. Sa observam ca

$$\mathbb{L}^k p_m = [m]_k p_{m-k}, \quad \forall 0 < k \leq n.$$

In particular, deducem ca

$$(\mathbb{L}^k p_m)_{x=0} = \begin{cases} n! & k = m \\ 0 & k \neq m. \end{cases}$$

Prin urmare

$$p_m(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(\mathbb{L}^k p_m)_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Daca inmultim egalitatea de mai sus cu o constanta q_m, si apoi sumam dupa $m = 0, \ldots, n$ obtinem

$$q_0 p_0(x) + \cdots + q_n p_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\big(\mathbb{L}^k(q_0 p_0(x) + \cdots + q_n p_n(x))\,\big)_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Sa notam

$$q(x) := q_0 p_0(x) + \cdots + q_n p_n(x).$$

Deducem

$$\sum_{k \geq 0} q_k p_k(x) = q(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\big(\mathbb{L}^k q(x)\,\big)_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Din Corolarul 5.9 deducem ca

$$q_k = \frac{\big(\mathbb{L}^k q(x)\,\big)_{x=0}}{k!}.$$

Corolarul 5.16. *Fie $\{p_n(x)\}$ un sir bazic normalizat cu operatorul fundamental $\mathbb{L}$. Atunci pentru orice polinom $q(x)$ de grad n are loc descompunerea*

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(q) p_k(x), \quad A_k(q) := \frac{1}{k!}\big(\mathbb{L}^k q\,\big)_{x=0} p_k.$$

In particular, daca $q = \{q_n(x)\}$ este un sir bazic, atunci matricea de tranzitie de la p la q este descrisa de numerele

$$a_{kn} = A_k(q_n) = \frac{1}{k!}\big(\mathbb{L}^k q_n\,\big)_{x=0}.$$ □

Rezultatul de mai sus pune in evidenta o aplicatie

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad p(x) = p(0).$$

Aceasta aplicatie se numeste *aplicatia de specializare in* 0. Mai general, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ definim

$$\mathcal{S}_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{S}_a p := p(a), \quad \forall p \in \mathbb{R}[x].$$

$\mathcal{S}_a$ se numeste *aplicatia de specializare in* a. Concluzia Corolarului 5.16 se poate rescrie

$$q(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \mathcal{S}(\mathbb{L}^k q) p_k(x), \quad \forall q \in \mathbb{R}[x] \tag{5.9}$$

Remarca 5.17. Putem folosi ultima egalitate pentru a reformula constructia sirul bazic normalizat $\{p_n\}$ asociat unui operator diferential $\mathbb{L}$ descrisa in Propozitia 5.15. Mai exact, avem

$$p_0 = 1,$$

si folosind (5.9) deducem formula inductiva

$$\frac{1}{(n+1)!} \mathcal{S}\mathbb{L}^{n+1}(x^{n+1}) p_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \mathcal{S}\mathbb{L}^k(x^{n+1}) p_k(x)$$

Reamintim ca expresiile $\mathcal{S}\mathbb{L}^k(x^k)$ sunt numere reale care se obtin calculand valoarea in $x = 0$ a polinomului $\mathbb{L}^k(x^{n+1}$ care are gradul $n + 1 - k$. □

Exemplul 5.18 (Numerele Stirling de tipul 2). Sa consideram sirul bazic normalizat $\{[x]_n\}$. Atunci, pentru orice intreg nenegativ are loc o descompunere

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{k,n}[x]_k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Numerele

$$(S_{k,n}) = \frac{1}{n!}(\frac{d^k}{dx^k}[x]_n)_{x=0}$$

se numesc *numerele Stirling de tipul* 2. Matricea

$$S = (S_{k,n})_{0 \leq k,n}$$

este matricea tranzitiei de la sirul bazic $\{[x]_n\}$ la sirul bazic $\{x^n\}$.

Numere Stirling de tipul 2 sunt numere *intregi pozitive* care au o interpretare combinatorica foarte interesanta.

Sa consideram o multime finita N de cardinal $|N| = n$, si o multime finita R de cardinal $|R| = r$. Notam cu R^N multimea tuturor functiilor $f : N \to R$. Dupa cum este bine cunoscut, $|R^N| = r^n$. Pentru orice submultime $K \subset R$ notam cu $\mathrm{Sur}(N,K)$ multimea *surjectiilor* $N \to K$. Cardinalul multimii $\mathrm{Sur}(N,K)$ depinde doar de cardinalul n a lui N si de cardinalul k a multimii K. Sa notam

$$c_{k,n} := |\,\mathrm{Sur}(N,K)|, \quad n := |N|, \quad k := |K|.$$

Vrem sa aratam ca $c_{k,n} = k!S_{k,n}$. Intr-adevar avem

$$r^n = |R^N| = \sum_{K \subset R} |\,\mathrm{Sur}(N,K)| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{K \subset R,\ k=|K|} c_{k,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} c_{k,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{[r]_k}{k!} c_{k,n}.$$

Prin urmare, au loc egalitatile

$$\sum_{k=0}^{n} S_{k,n}[r]_k = r^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{k,n}}{k!}[r]_k, \quad \forall n, r \in \mathbb{Z}, \quad n, r \geq 1.$$

De aici rezulta egalitatea $k!S_{k,n} = |\,\mathrm{Sur}(N,K)|$, $n = |N|$, $k = |K|$. Acum putem oferi o interpretare combinatorica a numerelor $S_{k,n}$.

Sa presupunem ca avem n bile *diferite* si vrem sa le distribuim in k cutii *identice* astfel incat fiecare cutie contine cel putin o bila. Afirmam ca numarul acestor distributii este exact $S_{k,n}$.

Etichetam bilele cu numere $\{1, 2, \dots, n\}$ si cutiile cu numere $\{1, 2, \dots, k\}$. Sa observam ca fiecarei surjectii

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}$$

ii corespunde o distributie de bile proprietatile dorite: bila i se duce in cutia $f(i)$. Pe de alta parte, doua surjectii

$$f, g : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, \dots, k\}$$

conduc la aceeasi distributie de bile daca putem obtine g din f printr-o re-etichetare a cutiilor, adica daca exista o permutare

$$\lambda : \{1, 2 \dots, \}k \to \{1, 2 \dots, k\},$$

astfel incat, $g = \lambda \circ f$. Deoarece exista $k!$ re-etichetari, deducem ca numar de distributii a n bile *distincte* in k cutii *identice* astfel incat nici o cutie sa nu fie goala, este egal cu

$$\frac{1}{k!}|\,\mathrm{Sur}(N,K)| = S_{k,n}, \quad n = |N|, \quad k = |K|. \qquad \square$$

Exercițiul 5.19. Folosind formula de inversiune binomiala (5.7) aratati ca numerele Stirling de tipul 2 satisfac egalitatea

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n. \qquad \square$$

Exercițiul 5.20. Sa formam serille formale de puteri

$$S_k(t) = \sum_{n \geq k} \frac{S_{k,n}}{n!} t^n, \quad k \geq 1.$$

(a) Folosind definitia combinatorica a numerelor Stirling de tipul 2 aratati ca

$$S_{k,n} = k S_{k,n-1} + S_{k-1,n-1}$$

si apoi deduceti ca

$$S_k(t) = \frac{1}{k!}(e^t - 1), \quad \forall k \geq 1.$$

(b) Demonstrati egalitatea de mai sus folosind functia generatoare a sirului binomial $\{[x]_n\}_{n \geq 0}$. $\square$

6. Operatori invarianti la translatii

In aceasta sectiune vom investiga legatura stransa dintre sirurile binomiale si o clasa speciala de operatori diferentiali.

Definiția 6.1. Un operator admisibil $T \in \mathbf{Op}$ se numeste *invariant la translatii* daca

$$E_h T = T E_h, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

unde reamintim ca E_h este operatorul de translatie

$$(E_h p)(x) = p(x+h), \quad \forall p \in \mathbb{R}[x].$$

Vom nota cu $\mathbf{Op}_{inv}$ multimea operatorilor admisibili invarianti la translatii, iar cu $\mathbf{DiffOp}_{inv}$ multimea operatorilor diferentiali invarianti la translatii. $\square$

Sa analizam putin conditia de invarianță la translatii. Daca $T \in \mathbf{Op}$, iar $p \in \mathbb{R}[x]]$, atunci pentru orice numar real h deducem din formula lui Taylor ca

$$(E_h p)(x) = p(x+h) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} D_x p(x),$$

si prin urmare

$$(T E_h p)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} T(D_x^n p)(x).$$

In mod asemanator deducem

$$(E_h T p)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} D_x^n (Tp)(x).$$

Rezulta ca T este invariant la translatii daca si numai daca

$$\sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} T(D_x^n p)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} D_x^n (Tp)(x), \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R}[x]. \tag{6.1}$$

Din egalitatea de mai sus deducem ca daca operatorul T comuta cu D_x, i.e., $TD_x = D_x T$, atunci T este invariant la translatii.

Exemplul 6.2. Operatorii D_x, Δ sunt operatori diferentiali invarianti la translatii. Operatorul Bernoulli B este de asemenea un operator invaraint la translatii. □

Exercițiul 6.3. (a) Aratati ca daca $S, T \in \mathbf{Op}_{inv}$ iar $c \in \mathbb{R}$ atunci $cS, \quad S+T, \quad ST \in \mathbf{Op}_{inv}$. Deduceti ca multimea $\mathbf{Op}_{inv}$ cu operatiile de adunare si compunere este un inel cu unitate.
(b) Aratati ca daca $\mathbb{L} \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$ atunci pentru orice serie formala $u(t) = u_0 + u_1 t + \cdots \in \mathbb{R}[[t]]$ operatorul admisibil $u(\mathbb{L})$ este invariant la translatii. In particular, operatorii de forma $u(D_x)$ sunt invarianti la translatii.
(c) Aratati ca $T \in \mathbf{Op}$ este invariant la translatii daca si numai daca T comuta cu D. (**Indicatie:** Folositi identitatea $D_x p = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(E_h - \mathbb{1})p$, $\forall p \in \mathbb{R}[x]$.)

Urmatorul rezultat arata de ce suntem interesati in operatori invarianti la translatii.

Teorema 6.4. *Sa presupunem ca $\{p_n(x)\}$ este un sir bazic normalizat cu operator fundamental $\mathbb{L}$. Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente.*
(a) $\mathbb{L}$ este invariant la translatii.
(b) $\{p_n(x)\}$ este sir binomial.

Demonstrație. (a) $\Longrightarrow$ (b).

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \quad \forall n \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Sa observam ca

$$p_n(x+y) = (E_y p_n)(x).$$

Acum folosim identitatea (5.9) in care $q(x) = (E_y p_n)(x)$ si deducem

$$p_n(x+y) = (E_y p_n)(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \mathcal{S}(\mathbb{L}^k E_y p_n) p_k(x)$$

Deoarece $\mathbb{L}$ este invariant la translatii, deducem ca $\mathbb{L}^k E_y = E_y \mathbb{L}^k$, si prin urmare

$$p_n(x+y) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \mathcal{S}(E_y \mathbb{L}^k p_n) p_k(x).$$

Reamintindu-ne ca $\mathbb{L}$ este operatorul fundamental al sirului $\{p_n(x)\}$, deducem ca

$$\mathbb{L}^k p_n = [n]_k p_{n-k}.$$

Pe de alta parte, pentru orice polinom p are loc egalitatea

$$\mathcal{S}(E_y p) = \mathcal{S}_y p = p(y).$$

Deducem

$$p_n(x+y) = \sum_{k\geq 0} \frac{[n]_k}{k!} (\mathcal{S}_y p_{n-k}) p_k(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y).$$

(b) $\Longrightarrow$ (a). Stim deci ca $\{p_n\}$ este un sir binomial si trebuie sa aratam ca pentru orice polinom q are loc egalitatea

$$E_y \mathbb{L} q = \mathbb{L} E_y q, \quad \forall y \in \mathbb{R} \tag{6.2}$$

Deoarece orice polinom q se scrie ca o combinatie liniara in polinoamle p_n,

$$q(x) = \sum_{n\geq 0} q_n p_n(x), \quad n \in \mathbb{R}$$

este suficient sa verificam egalitatea (6.2) doar in cazul special cand $q(x)$ este egal cu unul din polinoamle bazice $p_n(x)$. In acest caz avem

$$(E_y \mathbb{L} p_n)(x) = n(E_y p_{n-1})(x) = np_{n-1}(x+y) = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} p_k(x)p_k(y)$$

Pe de alta parte,

$$(E_y p_n)(x) = p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y)$$

In egalitatea de mai sus y *este fixat*, iar numerele $p_{n-k}(y)$ trebuiesc gandite ca fiind constante. Deducem

$$(\mathbb{L} E_y p_n)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p_{n-k}(y)(\mathbb{L} p_k)(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p_{n-k}(y)p_{k-1}(x).$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} p_{k-1}(x)p_{n-k}(y) n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} p_k(x)p_k(y) = (E_y \mathbb{L} p_n)(x). \qquad \square$$

Sa presupunem ca $\mathbb{L}$ este un operator diferential invariant la translatii, iar $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este sirul basic asociat. Atunci $\{p_n\}$ este sir binomial si prin urmare satisface egalitatile

$$p_n(x+h) = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k} p_{n-k}(x)p_k(h) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(\mathbb{L}^k p_n)(x)p_k(h).$$

Daca fixam h putem rescrie egalitatea de mai sus sub forma

$$E_h p_n = \sum_{k\geq 0}\frac{p_k(h)}{k!}\mathbb{L}^k p_n, \quad \forall n \geq 0, .$$

Orice polinom p se scrie ca o combinatie liniara *finita*

$$p = \sum_{n\geq 0} c_n p_n.$$

Deducem

$$E_h p = E_h \sum_{n\geq 0} c_n p_n = \sum_{n\geq 0} c_n E_h p_n = \sum_{n\geq 0} c_n\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{p_k(h)}{k!}\mathbb{L}^k p_n\Big)$$

$$= \sum_{k\geq 0}\frac{p_k(h)}{k!}\mathbb{L}^k\Big(\sum_{n\geq 0} c_n p_n\Big) = \sum_{k\geq 0}\frac{p_k(h)}{k!}\mathbb{L}^k p.$$

Am obtinut astfel urmatorul rezultat.

Propoziţia 6.5 (Formula lui Taylor generalizata). *Sa presupunem ca $\mathbb{L}$ este un operator diferential invariant la translatii iar $\{p_n(x)\}$ este sirul binomial asociat lui $\mathbb{L}$. Atunci are loc egalitatea*

$$E_h p = \sum_{k\geq 0}\frac{p_k(h)}{k!}\mathbb{L}^k p, \quad \forall p \in \mathbb{R}[x]. \qquad \square$$

Sa presupunem ca $L \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. Exercitiul 6.3 arata ca operatorii de forma $u(L)$, $u \in \mathbb{R}[[t]]$, sunt operatori admisibili invarianti la translatii. Rezultatul care urmeaza va arata ca acestia sunt *toti* operatorii admisibili invarianti la translatii.

Teorema 6.6. *Fie $L \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. Aplicatia*

$$\mathcal{Q}_L : \mathbb{R}[[t]] \to \mathbf{Op}_{inv}, \;\; \mathbb{R}[[t]] \ni u \mapsto \mathcal{Q}_L u = u(L) \in \mathbf{Op}_{inv}$$

este un izomorphism de inele.

Demonstraţie. Exercitiul 5.5 arata ca $\mathcal{Q}_L$ este un *morphism injectiv* de inele. Vom arata ca este un morphism *surjectiv*. Reamintim ca $\mathcal{S} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ este aplicatia de specializare in 0, $\mathcal{S}p = p(0)$. Notam cu $\{\ell_n(x)\}$ sirul binomial asociat lui L.

Sa presupunem ca $U \in \mathbf{Op}_{inv}$. Formam sirul de numere reale

$$u_n := \mathcal{S}U\ell_n = (U\ell_n)_{x=0}.$$

Notam cu $u(t)$ functia generatoare de tip exponential a acestui sir,

$$u(t) := \mathbf{Fg}_{\exp}(u_n; t) = \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} t^n.$$

Vom arata ca

$$U = \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} L^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(U\ell_n)_{x=0}}{n!} L^n. \tag{6.3}$$

Sa notam T operatorul din partea dreapta a egalitatii de mai sus. Vom arata ca au loc egalitatile

$$(U\ell_n)_{x=h} = (T\ell_n)_{x=h}, \;\; \forall n \geq 0, \;\; \forall h \in \mathbb{R}.$$

Ultima egalitate se poate rescrie sub forma

$$\mathcal{S}E_h L\ell_n = \mathcal{S}E_h T\ell_n, \;\; \forall n \geq 0, \;\; \forall h \in \mathbb{R}.$$

Din definitia sirului u_n, deducem ca egalitatea de mai sus are loc pentru $h = 0$ deoarece

$$L^m \ell_n = 0, \;\; \forall m \neq m, \;\; (L^n\ell_n)_{x=0} = n!.$$

Aceasta implica faptul ca pentru orice polinom p are loc egalitatea

$$\mathcal{S}Up = \mathcal{S}Tp \iff \mathcal{S}U = \mathcal{S}T.$$

Prin urmare, pentru orice numar real h are loc egalitatea

$$\mathcal{S}UE_h = (\mathcal{S}U) \circ E_h = (\mathcal{S}T) \circ E_h = \mathcal{S}TE_h.$$

Deoarece U si T sunt invarianti la translatii deducem ca $UE_h = E_h U$ si $TE_h = E_h$. Prin urmare,

$$\mathcal{S}E_h U = \mathcal{S}E_h T \Longrightarrow \mathcal{S}E_h U\ell_n = \mathcal{S}E_h U\ell_n, \;\; \forall n \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Remarca 6.7. Morfismul $\mathcal{Q}_L$ se mai numeste si *morfismul de cuantizare*. Inversul lui se numeste *morfismul simbol*. Pentru orice operator $T \in \mathbf{Op}_{inv}$, seria formala $\mathcal{Q}_L^{-1}(T)$ se numeste *simbolul operatorului T relativ la L*. Vom folosi notatia

$$\Sigma_{T/L}(t) := \mathcal{Q}_L^{-1} T.$$

Seria formala $\Sigma_{T/L}$ este *unic* determinata de conditia $T = \Sigma_{T/L}(L)$. $\square$

Exerciţiul 6.8. Sa presupunem ca $P, Q \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$, $R \in \mathbf{Op}_{inv}$. Aratati ca

$$\Sigma_{R/Q} \circ \Sigma_{Q/B} = \Sigma_{R/P} \in \mathbb{R}[[t]], \;\; \Sigma_{Q/P}(t) = \Sigma_{P/Q}^{\langle -1 \rangle}(t).$$

Reamintim ca ultima egalitate inseamna ca

$$\Sigma_{Q/P} \circ \Sigma_{P/Q}(t) = \Sigma_{P/Q}(t) \circ \Sigma_{Q/P} = t \in \mathbb{R}[[t]]. \qquad \square$$

Definiţia 6.9. Pentru orice $T \in \mathbf{Op}_{inv}$ definim $\sigma_T(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ prin egalitatea

$$\sigma_T(t) := \Sigma_{T/D_x}(t),$$

unde D_x este operatorul obisnuit de diferentiere. Vom spune ca $\sigma_T(t)$ este *simbolul* (complet) al operatorului T. □

Exerciţiul 6.10. Aratati ca pentru orice $S, T \in \mathbf{Op}_{inv}$ au loc egalitatile

$$\sigma_{S+T}(t) = \sigma_S(t) + \sigma_T(t), \quad \sigma_{ST}(t) = \sigma_S(t) \cdot \sigma_T(t).$$ □

Exemplul 6.11. (a) Sa observam mai intai ca $\sigma_{D_x}(t) = t$. Folosind egalitatile (5.2) si (5.3),

$$E_h = e^{hD_x}, \quad \Delta = e^{D_x} - \mathbb{1}$$

deducem

$$\sigma_{E_h}(t) = e^{ht}, \quad \sigma_\Delta(t) = e^t - 1.$$

(b) Operatorul lui Bernoulli B, definit de

$$(Bp)(x) := \int_x^{x+1} p(s)ds,$$

satisface egalitatea

$$(D_x B)p(x) = p(x+1) - p(x) = (\Delta p)(x) \Longleftrightarrow D_x B = \Delta$$

si prin urmare

$$\sigma_{D_x B} = \sigma_\Delta \Longrightarrow \sigma_B(t) = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Operatorul lui Bernoulli este inversabil, iar inversul lui are simbolul

$$\sigma_{B^{-1}}(t) = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Functia $\frac{t}{e^t-1}$ joaca un rol remarcabil in matematica pentru ca este implicata in multe din cele mai profunde descoperiri de la Newton pana in present.

(c) Definim

$$L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad Lp)(x) = \int_0^\infty e^{-s} p(x+s)ds, \quad \forall p \in \mathbb{R}[x]$$

Operatorul lui Laguerre $\mathrm{Lag} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ este definit de egalitatea

$$(\mathrm{Lag}\, p)(x) = -D_x Lp.$$

Sa observam ca Lp este intr-adevar un polinom atunci cand p este polinom. Pentru a vedea acest lucru este suficient sa studiem cazurile particulare $p(x) = x^n$. In aceasta situatie deducem

$$(Lp)(x) = \int_0^\infty e^{-s}(x+s)^n ds = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \int_0^\infty e^s s^k ds.$$

Daca notam

$$I_k = \int_0^\infty e^{-s} s^k ds$$

deducem integrand prin parti

$$I_k = -(e^{-s}s^k)\Big|_{s=0}^{s=\infty} + k\int_0^\infty e^{-s}s^{k-1} = kI_{k-1}.$$

Observand ca $I_0 = 1$ deducem $I_k = k!$ si prin urmare

$$L(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} k! = \sum_{k=0}^{n} [n]_k x^{n-k}.$$

In particular, deducem ca $L \in \mathbf{Op}^*$ si deci este inversabil. Este clar invariat la translatii. Vrem sa-i calculam simbolul. Sa observam ca

$$\begin{aligned}(D_x Lp)(x) &= \int_0^\infty e^{-s} \frac{dp}{dx}(x+s)ds = \int_0^\infty e^{-s} \frac{dp}{ds}(x+s)ds \\ &= e^{-s} p(x+s)\Big|_{s=0}^{s=\infty} - \int_0^\infty e^{-s} p(x+s)ds = -p(x) + L(x).\end{aligned}$$

Putem rescrie concluzia calculului de mai sus sub forma

$$(D_x L)p = -\mathbb{1}p + Lp, \ \ \forall p \in \mathbb{R}[x] \Longleftrightarrow (D_x - \mathbb{1})L = -\mathbb{1}.$$

Daca notam $\ell(t) = \sigma_L(t)$ deducem

$$(t-1)\ell(t) = -1 \Longleftrightarrow \ell(t) = -\frac{1}{t-1}.$$

Din egalitatea $\mathrm{Lag} = -D_x L$ deducem ca operatorul lui Laguerre este un operator diferential invariant la translatii al carui simbol este

$$\sigma_{\mathrm{Lag}}(t) = -\sigma_{D_x}(t)\ell(t) = \frac{t}{t-1}.$$

Putem rescrie ultima egalitate sub forma

$$\mathrm{Lag} = D_x(D_x - 1)^{-1}. \qquad \square$$

Sa presupunem ca $Q, R \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. Notam cu $\{q_n(x)\}$ sirul binomial asociat lui Q si cu $\{r_n(x)\}$ sirul binomial asociat lui Q. Dorim sa gasim o metoda convenabila de exprimare a polinoamelor r_n in functie de polinoamele q_n si operatorul Q.

Sa notam

$$f(t) := \Sigma_{R/Q}(t) \in \mathbb{R}[[t]], \ \ g(t) := \Sigma_{Q/R}(t) \in \mathbb{R}[[t]].$$

Prin urmare $R = f(Q)$, $Q = g(R)$, $g = f^{\langle -1 \rangle}$. Sa consideram operatorul $\mathcal{T}_{Q/R} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ de tranzitie de la sirul $\{r_n\}$ la sirul $\{q_n\}$, adica operatorul admisibil definit de egalitatile

$$\mathcal{T}_{Q/R} r_n = q_n, \ \ \forall n \geq 0.$$

$\mathcal{T}_{Q/R}$ este bijectiv, iar inversul lui este descris de

$$\mathcal{T}_{Q/R}^{-1} = \mathcal{T}_{R/Q} \Longleftrightarrow \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} q_n = r_n, \ \ \forall n \geq 0.$$

Are loc egalitatea

$$Q = \mathcal{T}_{Q/R} R \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} = \mathcal{T}_{Q/R} R \mathcal{T}_{R/Q}.$$

Intr-adevar, pentru orice $n \geq 0$ avem

$$\mathcal{T}_{Q/R} R \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} q_n = \mathcal{T}_{Q/R} R r_n = \mathcal{T}_{Q/R}(n r_{n-1}) = n \mathcal{T}_{Q/R} r_{n-1} = n q_{n-1} = Q q_n.$$

Sa consideram un alt operator $S \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$ al carui sir biomial asociat este $\{s_n(s)\}$. Notam

$$p_n := \mathcal{T}_{Q/R} s_n, \ \ \forall n \geq 0,$$

si definim

$$P = \mathcal{T}_{Q/R} S \mathcal{T}_{Q/R}^{-1}.$$

Teorema 6.12. *(a) Operatorul $P = \mathcal{T}_{Q/R} S \mathcal{T}_{Q/R}^{-1}$ este un operator diferential invariant la translatii, iar $\{p_n(x)\}$ este sirul binomial asociat lui P.*
(b) Definim $h(t) := \Sigma_{S/R}(t)$, adica $S = h(R)$. Atunci $P = h(Q)$, adică,

$$\Sigma_{P/Q}(t) = \Sigma_{S/R}(t),$$

si

$$\Sigma_{P/S}(t) = \Sigma_{S/R} \circ \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{S/R}^{\langle -1 \rangle}.$$

Concluzia (b) a teoremei de mai sus se poate ilustra in diagrama urmatoare

$$\begin{tikzcd} \{r_n\} \arrow[r, "\mathcal{T}_{S/R}"] \arrow[d, "\mathcal{T}_{Q,R}"'] & \{s_n\} \arrow[d, "\mathcal{T}_{P/S}=\mathcal{T}_{Q,R}"] \\ \{q_n\} \arrow[r, dashed] & \{p_n\} \end{tikzcd}$$

Demonstraţie. Sa notam $p_{-1} = 0$. Pentru a aerisi prezentarea vom scrie $\mathcal{T}$ in loc de $\mathcal{T}_{Q/R}$. Impartim demonstratia in trei pasi.

Pasul 1. *Sirul p_n este un sir bazic asociat lui P adica $Pp_n = np_{n-1}$, $\forall n \geq 0$.* Intr-adevar, au loc egalitatile,

$$Pp_n = \mathcal{T} S \mathcal{T}^{-1} p_n = \mathcal{T} S s_n = \mathcal{T}(n s_{n-1}) = n \mathcal{T} s_{n-1} = np_n.$$

Pasul 2. *Sirul p_n este normalizat.* Sa observam ca prin definitie sirurile $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ si $\{s_n\}$ sunt normalizate. Prin urmare

$$q_0 = r_0 = s_0 = 1.$$

Rezulta ca

$$p_0 = \mathcal{T} s_0 = \mathcal{T} r_0 = q_0 = 1.$$

Fie $n \geq 1$. Atunci, conform Corolarului 5.9, polinomul q_n se descompune ca o combinatie liniara

$$s_n(x) = c_0 p_1(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece

$$q_n(0) = p_k(0) = 0, \quad \forall k, n \geq 1$$

deducem $c_0 = 0$. Prin urmare,

$$p_n = \mathcal{C} s_n = \mathcal{T}(c_1 p_1 + \cdots + c_n p_n) = c_1 q_1 + \cdots + c_n q_n,$$

si deci $p_n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$. Aceasta arata ca $\{p_n(x)\}$ este sirul bazic normalizat asociat lui P.

Pasul 3. *$P = h(S)$. In particular $P \in$ $\mathbf{DiffOp}_{inv}$.*

Din egalitatea

$$Q = \mathcal{T} R \mathcal{T}^{-1}$$

deducem de aici ca pentru orice $k \geq 1$ are loc egalitatea

$$\mathcal{T} R^k \mathcal{T}^{-1} = \underbrace{(\mathcal{C} R \mathcal{C}^{-1}) \cdots (\mathcal{C} R \mathcal{C}^{-1})}_{k} = Q^k.$$

Rezulta ca pentru orice polinom $u(t) \in \mathbb{R}[t]$ are loc egalitatea

$$\mathcal{C} u(R) \mathcal{C}^{-1} = u(Q).$$

Sa consideram acum seria formala $h(t) = h_1 t + h_2 t^2 + \cdots$. Notam

$$h_n(t) = h_1 t + \cdots + h_n t^n \in \mathbb{R}[t].$$

Atunci
$$\mathcal{T}h_n(R)\mathcal{T}^{-1} = h_n(Q).$$
Daca $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ este un polinom de grad $\leq n$ atunci $Q^N q = 0 = R^N q$, $\forall N > n$. In particular, deoarece $\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \mathcal{C}^{-1}p$, $\forall p \in \mathbb{R}[x]$, deducem ca
$$h(Q)q = h_n(Q)q = \mathcal{T}h_n(R)(\mathcal{T}^{-1}p) = \mathcal{T}h(R)\mathcal{T}^{-1}q \quad \forall q \in \mathbb{R}[x], \quad \operatorname{grad} p \leq n.$$
Ultima egalitate se poate rescrie
$$h(Q) = \mathcal{T}h(R)\mathcal{T}^{-1}.$$
Reamintindu-ne ca $h(R) = S$ deducem
$$h(Q) = \mathcal{T}S\mathcal{T}^{-1} = P.$$
Rezulta ca
$$\Sigma_{P/Q}(t) = h(t) = \Sigma_{S/R}(t)$$
Folosind Exercitiul 6.8 deducem
$$\Sigma_{P/S} = \Sigma_{P/Q} \circ \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{R/S} = \Sigma_{S/R} \circ \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{S/R}^{\langle -1 \rangle}. \qquad \square$$
Daca aplicam teorema de mai sus in cazul particular cand $S = Q$ obtinem urmatorul rezultat.

Corolarul 6.13. *Sa presupunem ca $R, Q \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$, $\{r_n(x)\}$ este sirul binomial asociat lui R, iar $\{q_n\}$ este sirul binomial asociat lui Q. Sa notam $f(t) := \Sigma_{R/Q}(t)$ adica $R = f(Q)$. Atunci sirul bazic $\{p_n(x) = \mathcal{T}_{Q/R}q_n\}$ este sirul binomial asociat operatorului*
$$P = f^{\langle -1 \rangle}(Q).$$

Demonstraţie. Din Teorema 6.12 deducem
$$\Sigma_{P/Q} = \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{Q/R}^{-1} = \Sigma_{Q/R} = f^{\langle -1 \rangle}. \qquad \square$$
Folosind egalitatea (5.9) pentru sirul binomial $\{p_n(x)\}$ din corolarul de mai sus deducem ca pentru orice polinom $q \in \mathbb{R}[x]$ avem o descompunere de forma
$$q(x) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!}(P^k q)_{x=0} p_k.$$
In particular, daca alegem $q = q_n$, deducem
$$q_n = \sum_{k=0} \frac{1}{k!}(P^k q_n)_{x=0} p_k,$$
si deci
$$r_n = \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} q_n = \mathcal{T}_{R/Q}^{-1}\Big(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(P^k q_n)_{x=0} p_k \Big) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(P^k q_n)_{x=0} \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} p_k$$
$$= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(P^k q_n)_{x=0} q_k = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\big(f^{\langle -1 \rangle}(Q)^k q_n \big)_{x=0} q_k.$$
Am obtinut astfel urmatorul rezultat fundamental.

Teorema 6.14. *Sa presupunem ca $Q, R \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. Notam cu $\{q_n(x)\}$ sirul bazic asociat lui Q si cu $\{r_n(x)\}$ sirul binomial asociat lui R. Daca $f(t) = \Sigma_{R/Q}(t)$, adica $R = f(Q)$, atunci*
$$r_n = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\big(f^{\langle -1 \rangle}(Q)^k q_n \big)_{x=0} q_k, \quad \forall n \geq 0. \qquad \square$$

Remarca 6.15. (a) In teorema de mai sus sa observam ca numarul real

$$\big(f^{\langle -1\rangle}(Q)^k q_n \big)_{x=0} q_k$$

este egal cu $n!$ inmultit cu coeficientul lui t^n in seria $f^{\langle -1\rangle}(t)$, adica

$$\frac{1}{k!} f^{\langle -1\rangle}(Q)^k q_n = n![t]^n \big(f^{\langle -1\rangle}(t) \big)^k,$$

Daca notam $g(t) = f^{\langle -1\rangle}(t)$ deducem ca ca matricea de tranzitie de la sirul $\{q_n(x)\}$ la sirul $\{r_n(x)\}$ este data de

$$A_{kn} = \frac{n!}{k!}[t^n]g(t)^k.$$

Rezulta ca

$$A_k(t) := \sum_{n\geq 0} A_{kn}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}g(t)^k.$$

Cu alte cuvinte, $A_k(t)$, functia generatoare de tip exponential al numerelor de pe linia k a matricei de tranzitie este egala cu seria formala $\frac{1}{k!}g(t)^k$.

(b) Sa scriem $f(t)$ sub forma

$$\frac{t}{h(t)},\quad h(t) = h_0 + h_1 t + \cdots \in \mathbb{R}[[t]],\quad h_0 \neq 0.$$

Atunci din formula de inversiune a lui Lagrange (4.5) deducem

$$[t]^n g(t)^k = \frac{k}{n}[t^{n-k}]h(t)^k,\quad n,k\geq 0.$$

Rezulta

$$A_{kn} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!}[t^{n-k}]h(t)^k \Longleftrightarrow \frac{1}{(n-1)!}A_{kn} = \frac{1}{(k-1)!}[t^{n-k}]h(t)^k = \frac{1}{(k-1)!}[t^n](th(t))^k.$$

Inmultind ultima egalitate cu t^n si apoi sumand dupa $n\geq 1$ deducem

$$\sum_{n\geq 1} A_{kn}\frac{t^n}{(n-1)!} = \frac{1}{(k-1)^n}t^k h(t)^k.$$

Putem rescrie acest lucru sub forma

$$tD_t A_k(t) = \frac{1}{(k-1)^n}t^k h(t)^k.$$

Daca ne reamintim ca $f(t) = \frac{t}{h(t)}$ deducem $th(t) = \frac{t^2}{f(t)}$, si prin urmare

$$t^{-k+1}D_t A_k(t) = \frac{1}{(k-1)!}\Big(\frac{t}{f(t)}\Big)^k. \qquad \square$$

In aplicatii un caz particular al Teoremei 6.14 este foarte util.

Corolarul 6.16. *Sa presupunem ca $R\in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. Notam cu $\{r_n(x)\}$ sirul binomial asociat lui R, si cu $\sigma(t)\in\mathbb{R}[[t]]$ simbolul lui R, adica*

$$R = \sigma(D_x).$$

Daca notam cu $\mu_n(x)$ monomul $\mu_n(x) = x^n$, atunci

$$r_n(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(\sigma^{\langle -1\rangle}(D_x)^k\mu_n)_{x=0}\mu_k(x).$$

Demonstraţie. In Teorema 6.14 alegem $Q = D_x$. Atunci

$$\mathcal{Q}_n(x) = x^n = \mu_n(x), \quad f(t) = \Sigma_{R/D_x}(t) = \sigma_R(t) = \sigma(t). \qquad \square$$

Corolarul 6.17. *Sa presupunem ca $P \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$, iar $\{p_n(x)\}$ este sirul binomial asociat lui P. Daca $\sigma(t)$ este simbolul lui P, adica $P = \sigma(D_x)$, iar $g(t) = \sigma^{\langle -1 \rangle}(t)$ atunci*

$$\sum_{n\geq 0} p_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{xg(t)}.$$

Demonstraţie. Sa notam cu G operatorul

$$G = g(D_x) \in \mathbf{DiffOp}_{inv} \Longleftrightarrow \Sigma_{G/D_x}(t) = g(t).$$

Folosind Corolarul 6.16 deducem

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} G^k(x^n)_{x=0}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} G^k(x^n)_{x=0}\frac{x^k}{k!}.$$

Fix $h \in \mathbb{R}$ and consider the operator

$$Q_h : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad Q_h p = \sum_{n\geq 0}\frac{p_n(h)}{n!}D_x^n p.$$

Sa observam ca Q_h este un operator admisibil invariant la translatii al carui simbol este

$$\Sigma_{Q_h/D_x}(t) = \sum_{n\geq 0} p_n(h)\frac{t^n}{n!}.$$

Pe de alta parte

$$Q_h = \sum_{n\geq 0}\frac{p_n(h)}{n!}D_x^n = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0}^{n} G^k(x^n)_{x=0}\frac{h^k}{k!}\right)\frac{1}{n!}D_x^n = \sum_{k\geq 0}\frac{h^k}{k!}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{G^k(x^n)_{x=0}}{n!}D_x^n\right).$$

Deoarece $\{x^n\}$ este sirul binomial asociat lui D_x, deducem din (6.3) ca

$$G^k = \sum_{n\geq 0}\frac{G^k(x^n)_{x=0}}{n!}D_x^n.$$

Prin urmare,

$$Q_h = \sum_{k\geq 0}\frac{h^k}{k!}G^k = e^{hG} \Longrightarrow \Sigma_{Q_h/G}(t) = e^{ht}.$$

Folosind Exercitiul 6.8 deducem

$$\sum_{n\geq 0} p_n(h)\frac{t^n}{n!} = \Sigma_{Q_h/D_x} = \Sigma_{Q_h/G} \circ \Sigma_{G/D_x}(t) = e^{hg(t)}. \qquad \square$$

7. EXEMPLE

Sa ilustram rezultatele obtinute pe cateva situatii celebre.

Exemplul 7.1 (Polinoamele lui Laguerre). Ca sa vedem cum functioneaza Corolarul 6.16 il aplicam intr-o situatie concreta, dar cu multe aplicatii in matematica. Sa presupunem ca R este operatorul lui Laguerre

$$R = \mathrm{Lag} = D_x(D_x - 1)^{-1}.$$

Sa notam cu $\{\ell_n(x)\}$ sirul binomial asociat operatorului lui Laguerre. Dorim sa dam o descriere mai explicita a acestor polinoame folosind Corolarul 6.16.

Simbolul operatoratorului Lag este

$$s(t) = t(t-1)^{-1}$$

Pentru a afla inversa compozitionala a seriei s rezolvam ecuatia

$$s = t(t-1)^{-1},$$

in care necunoscuta este t. Ajungem la concluzia surprinzatoare

$$t = s(s-1)^{-1}.$$

Cu alte cuvinte

$$s^{\langle -1\rangle}(t) = s(t).$$

Deducem

$$\ell_n(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(\mathrm{Lag}^k \mu_n)_{x=0} x^k, \quad \mu_n(x) = x^n.$$

Pentru a calcula $(\mathrm{Lag}\,\mu_n)_{x=0}$ putem folosi fie calculele din Exemplul 6.11, fie putem proceda direct, folosind formula

$$\mathrm{Lag} = -D(1-D)^{-1} \Longrightarrow \mathrm{Lag}^k = -D^k(1-D)^{-k} = (-1)^k D^k \sum_{j\geq 0} \binom{j+k-1}{j} D^j.$$

Coeficientul lui D^n in aceasta serie este

$$(-1)^k \binom{n-1}{n-k} = (-1)^k \binom{n-1}{k-1},$$

si deci

$$(\mathrm{Lag}^k \mu_n)_{x=0} = (-1)^k \binom{n-1}{k-1} (D^n \mu_n)_{x=0} = (-1)^k n! \binom{n-1}{k-1}.$$

Prin urmare

$$\ell_n(x) = n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Deoarece $\ell_n(0) = 0$, $\forall n > 0$, deducem ca polinomul $\ell_{n+1}(x)$ se scrie ca un produs

$$\ell_{n+1}(x) = xL_n(x), \quad \mathrm{grad}\, L_n = n.$$

Mai exact

$$L_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

De exemplu

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = (1-x), \quad L_2(x) = (2 - 4x + x^2).$$

Polinoamele $L_n(x)$ au multe aplicatii in matematica. Au aparut mai intai in fizica matematica, dar in ultimile decenii si-au facut apartia si in combinatorica. Sa metionam o astfel de aplicatie surprinzatoare.

Probabil cititorul a auzit deja de problema deranjamentelor, dar pentru orice eventualitate o reamintim. Sa presupunem ca avem n bile, numerotate cu numerele $1, \dots, n$ si n cutii numerotate cu numerele $1, \dots n$. Problema clasica a deranjamentelor intreaba in cate moduri putem distribui bilele, una pe cutie, incat nici una din bile sa nu fie situata intr-o cutie cu acelasi numar ca si bila.

Raspunsul la acesta intrebare se gaseste prin metoda includerii-excluderi si deducem ca numarul de deranjamente este

$$D_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Putem considera o situatie mult mai sofisticata. Sa presupunem ca avem o partitie a multimii $\{1, \dots, n\}$ in k submultimi nevide

$$\{1, \dots, n\} = F_1 \cup \dots \cup F_k, \quad F_i \cap F_j \neq \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Notam $f_i := |F_i|$. Notam cu $D(f_1, \dots, f_k)$ numarul de permutari φ ale multimii $\{1, \dots, n\}$ cu proprietatea ca nu exista $i \in \{1, \dots, n\}$ incat i si $\varphi(i)$ se afla in aceeasi multime a partitiei. Putem formula aceasta problema intr-un mod mai amuzant.

Sa presupunem ca la o petrecere participa k familii $F_1, \cdots, F_k$ si in total sunt n persoane. Fiecare din persoane isi scrie numele pe o bucata de hartie pe care apoi o pune intr-o cutie. Urmeaza o tragere la sorti in care fiecare persoana extrage un nume din cutie. Atunci $D(f_1, \dots, f_k)$ este numarul de posibiltati de trageri la sorti cu proprietatea ca nici una din persoane nu a extras numele unei persoane din familia lui. Problema clasica a deranjamentelor corespunde cazului special cand $k = n$, $f_i = 1$.

Un rezultat din 1976 datorat matematicienilor S. Even, J. Gillis ofera un raspuns surprinzator.

$$D(f_1, \dots, f_k) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-x} L_{f_1}(x) \cdots L_{f_k}(x) dx.$$

Este usor de verificat ca intr-adevar

$$n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \int_0^\infty e^{-x} (x-1)^n dx.$$

Demostratia cazului general este bazata tot pe principiul includerii-excluderii, dar necesita mai multa ingeniozitate pentru a formula rezultatul final intr-o forma asa de eleganta.

La foarte scurt timp dupa ce Even si Gillis si demonstrat acest fapt, D. M. Jackson a dat o demonstratie foarte scurta bazat pe rezultatele din Exercitiul 2.9. Cititorul are acum toate cunostiintele necesare demonstrarii acestui rezultat curios. □

Exerciţiul 7.2. Aratati ca

$$\ell_n(x) = x e^x D_x^n (e^{-x} x^{n-1}), \quad \forall n \geq 0. \qquad \square$$

Exemplul 7.3 (Polinoame Bernoulli). Polinoamele lui Bernoulli $\{\beta_n(x)\}_{n \geq 0}$ formeaza un sir bazic foarte special care nu e *normalizat*, dar al carui operator fundamental este D_x, adica

$$D\beta_n(x) = n\beta_{n-1}(x), \quad \forall n \geq 1. \tag{7.1}$$

In plus, aceste polinoame satisfac ecuatiile cu diferente

$$(\Delta\beta_n)(x) = D_x(x^n), \quad \forall n \geq 1. \tag{7.2}$$

Sa aratam ca aceste doua conditii de mai sus definesc unic sirul bazic $\{\beta_n(x)\}$.

Sa ne reamintim ca operatorului lui Bernoulli B satisface

$$DB = BD = \Delta.$$

Aplicand operatorul B ambelor parti ale egalitatii (7.1) si obtinem

$$BD\beta_n = nB\beta_{n-1}.$$

Pe de alta parte, folosind (7.2) obtinem

$$BD\beta_n = \Delta\beta_n = nx^{n-1},$$

si deducem

$$nx^{n-1} = nB\beta_{n-1}, \;\; \forall n \geq 1 \Longrightarrow \beta_n = B^{-1}(x^n), \;\; \forall n \geq 0.$$

Sa notam $b_n := \beta_n(0)$. Numerele b_n se numesc *numerele lui Bernoulli*. Sa observam ca

$$D_x^k\beta_n = [n]_k\beta_{n-k}.$$

Din formula lui Taylor deducem ca pentru orice $n \geq 1$ are loc egalitatea

$$\beta_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(D_x^k\beta_n)(0)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}[n]_k\beta_{n-k}(0)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}x^k. \tag{7.3}$$

Aceasta egalitate ne arata ca polinoamle lui Bernoulli sunt unic determinate de numerele lui Bernoulli. Sa notam cu $b(t)$ functia generatoare de tip exponential a numerelor lui Bernoulli, adica

$$b(t) = \sum_{n\geq 0} b_n\frac{t^n}{n!}.$$

Atunci egalitatea (7.3) se poate reformula compact sub forma

$$b(t)e^{tx} = \sum_{n\geq 0}\beta_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{7.4}$$

Notam seria din partea dreapta cu $\beta_x(t)$. Sa ne reamintim ca

$$\beta_n(x+1) - \beta_n(x) = nx^{n-1}, \;\; \forall n \geq 0.$$

Prin urmare

$$\frac{t^n}{n!}(\beta_n(x+1) - \beta_n(x)) = tx^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \;\; \forall n \geq 1.$$

Sumand aceste egalitati dupa $n \geq 1$ deducem

$$\beta_{x+1}(t) - \beta_x(t) = te^{tx}.$$

Pe de alta parte, folosind (7.4) obtinem egalitatea

$$\beta_{x+1}(t) - \beta_x(t) = b(t)\big(\, e^{t(x+1)} - e^{tx}\,\big).$$

Prin urmare

$$te^{tx} = b(t)\big(\, e^{t(x+1)} - e^{tx}\,\big) = e^{tx}b(t)(e^t - 1) \Longrightarrow t = b(t)(e^t - 1)$$

De aici rezulta

$$b(t) = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Trebuie sa comentam putin ultima egalitate. Seria formala $e^t - 1$ nu are invers multiplicativ. Sa observam insa ca putem scrie

$$e^t - 1 = t(1 + \frac{t}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{n!} + \cdots) = t\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{(n+1)!}.$$

Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{(n+1)!}$ are invers multiplicativ si atunci definim

$$\frac{t}{e^t-1}=\frac{1}{\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{(n+1)!}}.$$

Pentru a face calcule concrete este insa mult mai util sa folosim egalitatea

$$t=b(t)(e^t-1)$$

care conduce la urmatoarele relatii de recurenta

$$b_0=1,\ \ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}=0,\ \ \forall n\geq 1$$

Mai explicit

$$\binom{n}{1}b_{n-1}+\binom{n}{2}b_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}b_0=0,$$

de unde rezulta ca

$$b_n=-\frac{1}{n}\left(\binom{n}{2}b_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}b_0,\right),\ \ \forall n$$

Iata cateva valori pentru numerele lui Bernoulli

$$b_{2k+1}=0,\ \ \forall k\geq 1,$$

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18
b_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3615}{510}$	$\frac{43867}{798}$

Iata si cateva polinoame Bernoulli

$$\beta_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\qquad \beta_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

$$\beta_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},$$

$$\beta_5(x)=x^5-\frac{5}{2}\,x^4+\frac{5}{3}\,x^3-\frac{1}{6}\,x,$$

$$\beta_6(x)=x^6-3\,x^5+\frac{5}{2}\,x^4-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{42}.$$

Polinoamele Bernoulli apar in surpinzator de multe situatii in matematica. Vrem sa mentionam aici cateva aplicatii elementare.

Din egalitea

$$\beta_{k+1}(x+1)-\beta_{k+1}(x)=(k+1)x^k,\ \ \forall x\in\mathbb{R},\ \ k\geq 1,$$

deducem

$$\beta_k(n)-\beta_k(0)=(k+1)(1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k),$$

adica

$$\sum_{j=1}^{n-1}j^k=\frac{1}{k+1}\big(\,\beta_{k+1}(n)-\beta_{k+1}(0)\,\big). \tag{7.5}$$

Mai general, are loc egalitatea

$$\sum_{j=0}^{n-1}(h+j)^k=\frac{1}{k+1}\big(\,\beta_{k+1}(h+n)-\beta_{k+1}(h),\,\big),\ \ \forall h\in\mathbb{R}. \tag{7.6}$$

De exemplu

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+(n-1)^5=\frac{1}{6}\big(n^6-3n^5+\frac{5}{2}n^4-\frac{1}{2}n^2\big),\ \ \forall n\geq 2.$$

Exemplul de mai sus este un caz special al *formulei de sumare Euler-MacLaurin*.

Sa presupunem ca p este un polinom. Sa notam

$$q:=Bp\Longleftrightarrow q(x)=\int_x^{x+1}p(t)dt.$$

In particular,

$$q(x+j)=\int_{x+j}^{x+j+1}p(t)dt.$$

Rezulta ca

$$\sum_{j=0}^{n-1}q(x+j)=\int_0^n p(t)dt.$$

Daca acum scriem $p(x)=(B^{-1}q)(x)$ obtinem

$$\sum_{j=0}^{n-1}q(x+j)=\int_x^{x+j}(B^{-1}q)(t)dt. \tag{7.7}$$

In fine daca polinomul q este derivata unui polinom f, adica $q=Df$ atunci $B^{-1}Df=DB^{-1}$ deoarece B^{-1} este invariant la translatii si deci comuta cu D. Din formula Leibniz-Newton obinem celebra formula de sumare Euler-Maclaurin

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}D_xf(x+j)&=\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{b_k}{k!}(D^kf)(x+n)\Big)-\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{b_k}{k!}(D^kf)(x)\Big)\\&=(B^{-1}f)(x+n)-(B^{-1}f)(x).\end{aligned} \tag{7.8}$$

Probabil ca ar trebui sa explicam de ce egalitatea de mai sus este uluitoare. Suma din partea stanga a egalitatii depinde de comportarea *globala* a polinomului f pe *intreg* intervalul $[x,x+n]$. Pe de alta parte, suma din partea dreapta depinde doar de comportarea *locala* lui f doar in *vecinatatea a doua puncte* x si $x+n$. □

Exerciţiul 7.4. Sa consideram seria formala de puteri $u(t)=\sum_{n\geq 0}u_n\frac{t^n}{n!}$ cu proprietatea ca $u_0\neq 0$. Notam cu P operatorul $P=u(D)\in\mathbf{Op}^*_{inv}$ si cu $p_n(x)$ polinoamele $P(x^n)$. Aratati ca

$$\sum_{n\geq 0}p_n(x)\frac{t^n}{n!}=u(t)e^{tx}.$$ □

Exerciţiul 7.5. (a)Aratati ca

$$\beta_n(x)=(-1)^n\beta_n(1-x),\ \ \forall n\geq 1,\ \ x\in\mathbb{R}$$

si

$$b_{2k+1}=0,\ \ \forall k\geq 1.$$

(b) Demonstrati *formula lui Raabe*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\beta_k\big(\,x+\frac{j}{n}\,\big)=\frac{1}{n^k}\beta_k(nx),\ \ \forall k,n\geq 1.$$

(c) Aratati ca

$$\beta_k\left(\frac{1}{2}\right) = b_k\left(\frac{1}{2^{k-1}} - 1\right).$$

(d) Aratati ca pentru orice $x \in (0, \frac{1}{2})$ au loc inegalitatile

$$(-1)^k \beta_{2k-1}(x) > 0, \quad (-1)^k \big(\beta_{2k}(x) - b_{2k}\big) > 0.$$

(e) Aratati ca

$$(-1)^{k+1} b_{2k} > 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Exerciţiul 7.6. Sa definim functiile Bernoulli periodice

$$\bar{\beta}_n(x) = \beta_n(x - \lfloor x \rfloor),$$

unde $\lfloor x \rfloor$ este partea intrega a numarului real x. Sa presupunem ca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie infinit differentiabila.
(a) Aratati prin inductie dupa $n \geq 1$ ca

$$f(0) = \int_0^1 f(t)dt + \sum_{k=1}^n = \frac{b_k}{k!}\Big(f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)\Big) + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 \beta_n(t) f^{(n)}(t)dt.$$

(b) Aratati ca pentru orice intregi pozitivi m, n are loc egalitatea

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(j) = \int_0^m f(t)dt + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k!}\Big(f^{(k-1)}(m) - f^{(k-1)}(0)\Big) + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^m \bar{\beta}_n(t) f^{(n)}(t)dt.$$

Indicaţie: Folositi partea (a) pentru functiile $f_j(t) = f(t + j)$, $j = 0, \ldots, m-1$. □

Exerciţiul 7.7. (a) Aratati ca pentru orice $k \geq 1$ are loc egalitatea

$$\int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(t)dt = 0.$$

(b) Aratati ca pentru orice intregi $k, m \geq 1$ au loc egalitatile

$$\int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(t)\sin(2m\pi t)dt = 0,$$

$$A_{k,m} := \int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(t)\cos(2\pi m t)dt = \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(2\pi m)^{2k}}.$$

(c) Sa consideram functiile

$$f_m(t) = \sum_{j=1}^m A_{k,m}\cos 2\pi j t, \quad C_m(t) = \sum_{j=0}^m \cos(2\pi j t).$$

Aratati ca

$$\int_0^1 C_m(t)dt = 1,$$

si

$$b_{2k} = \bar{\beta}_{2k}(0) = \lim_{m\to\infty} f_m(0).$$

Indicaţie Scrieti diferenta $b_{2k} - f_m(0)$ sub forma

$$b_{2k} - f_m(0) = \int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(0)dt - \int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(t)C_m(t)dt = \int_0^1 C_m(t)\big(\bar{\beta}_{2k}(0) - \bar{\beta}_{2k}(t)\big)dt.$$

REFERENCES

[1] *Enciclopedia electronică a şirurilor de numere intregi*, se poate gasi gratis pe Internet la adresa http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html?language=romanian

[2] M. Aigner: *Combinatorial Analysis*, Springer-Verlag, 1979.

[3] G.M. Fihtenhoţ: *Curs de Calcul Diferenţial şi Integral*, vol.II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.

[4] R. Stanley: *Enumerative Combinatorics. vol.I*, Cambridge University Press, 1986

[5] H. S. Wilf: *Generatingfunctionology*, se poate gasi gratis pe Internet la adresa http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF NOTRE DAME, NOTRE DAME, IN 46556-4618.

E-mail address: nicolaescu.1@nd.edu

URL: http://www.nd.edu/˜lnicolae/